$0 = \infty$??

請閱讀以下論證：

$$
\begin{aligned}
&1+2+3+\ldots=\infty \\
&\Rightarrow 2+3+4+\ldots=\infty \\
&\Rightarrow 3+4+5+\ldots=\infty \\
&\Rightarrow 4+5+6+\ldots=\infty \\
&\qquad\vdots \\
&\Rightarrow k+(k+1)+(k+2)+\ldots=\infty \\
&\qquad\vdots \\
&\underset{??}{\Rightarrow} 0=\infty
\end{aligned}
$$

卻意外地發現 0 和 ∞ 居然相等！這是個不合理的現象，但上述的推論看起來卻沒什麼問題。過程中是不是哪個環節出錯了？它們似乎和其中「無窮」的運作過程有關。若是如此，那究竟無窮是什麼？

當我們腦海裡想著要式子不斷地被減下去的時候，左式真的能被減成 0 嗎？那樣的式子真的能被減「無窮多」次嗎？還是只是減了很多很多次，可以任意多次（i.e. 對任意 $n \in N$ 的 n 次）而已？事實上，答案是後者。如果我們一步一步地操作式子（不要省略或跳過任何一步），會發現我們能做到的頂多是

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots=\infty$$

即使 n 的值極度地大，但就是無法讓左式全被「削光」。也許你會立即反問：那麼「1 + 2 + 3 + … = ∞」不也是加無限多次嗎？爲什麼這個等式可以成立？也許我們可以進一步發問：誰有本事加它個無限多次？我們根本做不到這件事！我們充其量也只能加「非常多次」,「極爲多次」，也就是說，我們對它的解讀建立在另一個「很巧妙」的想法。

事實上，我們察覺到的是：對任何 $M>0$，都可以將級數加夠多項使得它的和 1+2+3+…+$N>M$ ———它可以突破任何正數 M 的限制。正是因爲這個「有限」特性，我們直觀地，簡便地賦與它「無限」的概念（或詮釋），因而列出 「1 + 2 + 3 + … = ∞」這個等式。

類似地，

$$
\begin{aligned}
&1+1+1+\ldots=\infty \\
&1+3+5+7+\ldots=\infty \\
&1+2+4+8+\ldots=\infty
\end{aligned}
$$

皆依照著上述的想法而得，也就是它們皆能突破任何正數 M 的限制。相對地，

對於相似但不同的例子：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=2$$

我們也依照同一套思維操作———當然不是加無窮多次，事實上，加任意次的值都 <2，用等號表達似乎有些瑕疵———我們同樣根據它的「趨勢」。它的關鍵在於，只要加到夠多項，這些項的和總是和數字 2 任意地靠近，也就是任何誤差 (0.1, 0.01, 0.001, 000000001 等) 都阻擋不了此級數逼近 2 的「趨勢」。

因此，讓我們回到最原本的問題———什麼是加「無窮多次」？這三個字並不能從面詮釋，唯有用它的「有限性質」並察覺出它的「趨勢」，才能理解它的真實意義。

〔註〕在正式的數列極限定義中，要描述一個數列 a_n 趨近於一個數 a 的條件也依照誤差的想法：對任何 $\varepsilon>0$，皆存在 $N\in \mathbb{N}$，使得每當自然數 $n\geq N$ 時，$|a_n-a|<\varepsilon$。

這時候，也許有人會意圖模仿「有限性」的想法處理原命題的「無限步驟」，但這勢必將失敗。理由如下：

(1) 對無窮多次加法，我們能用「相差多少」來掌握逼近的程度及狀況，然而對於「無窮步驟」卻沒有這樣的「先決條件」可用。

(2) 「證明」是一步一步依照邏輯推導的說服過程。省略步驟的情形在標準的情況之下是不該發生的，縱使發生，我們理應能將省略的部分「完整還原」。但「無窮步驟」並無法如法炮製，縱使吾人這麼回應：「第 k 步就是『$k+(k+1)+...=\infty$』」，但我們依然無法找到任何一步說明「$0=\infty$」，如同前段所述。

(3) 再者，就本質以區分，對於「$1+2+3+...=\infty$」，我們是用邏輯的手法（即證明的方法）處理無窮多項的運算（即用有限特性和任意趨近）；但當處理「無窮步驟」時，我們卻發現我們正試圖由「邏輯的手法」處理「邏輯的手法」。這似乎產生了（論證的）層級上的錯亂，終將簡易的事情複雜化，並不是好的做法。

總的來說，無限是一種直觀的想法，但在操作上卻陷井滿佈。我們必須依照邏輯的推演小心應對，方可避免各式各樣惱人的悖論。