

YCY

整數跟正整數一樣多，為甚麼？

Gefällt mir · · Beitrag nicht mehr folgen · Teilen · 30. Oktober um 00:58

Gary Zheng und 4 anderen gefällt das.

1 geteilter Inhalt

ZBH Cardinal number 一樣多

30. Oktober um 01:00 · Gefällt mir · 1

THC 因為可以一一對應

30. Oktober um 01:01 · Gefällt mir · 5

JYH 怎麼一一對應啊

30. Oktober um 01:01 · Gefällt mir

THC 奇數的 $x \rightarrow (x+1)/2$

偶數的 $x \rightarrow (2-x)/2$

30. Oktober um 01:03 · Bearbeitet · Gefällt mir

JYH 那負整數怎麼對應

30. Oktober um 01:05 · Gefällt mir

THC 奇數 $x \rightarrow (x-1)/2$

偶數 $x \rightarrow -(x+2)/2$ 想法一樣

30. Oktober um 01:08 · Gefällt mir

JYH 那 $x \rightarrow +x$ and $-x$

為什麼不能說是兩倍

30. Oktober um 01:11 · Gefällt mir

ZBH 請問樓上的兩倍是什麼意思？

30. Oktober um 01:13 · Gefällt mir

JYH 可以一倍就不能兩倍喔

30. Oktober um 01:14 · Gefällt mir

JYH 而且整數跟正整數不都是可數的無限嗎

30. Oktober um 01:14 · Gefällt mir

ZBH 基本上對應方式沒有強求，只要你能找到個規律使得所有整數與正整數互相對應(注意是1-1)就可以了

30. Oktober um 01:15 · Gefällt mir

JYH 那我上面的對應方法不行嗎

30. Oktober um 01:16 · Gefällt mir

HSA 因為說整數數量比正整數數量多一倍沒意義

30. Oktober um 01:17 via Handy · Gefällt mir · 1

HSA 那也能說多三倍 多四倍 就不用討論了

30. Oktober um 01:17 via Handy · Gefällt mir

HSA 重點是有比 N 大的無限集合

30. Oktober um 01:17 via Handy · Gefällt mir

JYH 有點不懂

30. Oktober um 01:18 · Gefällt mir

JBH 整數跟正整數"可以"一一對應，所以兩者"一樣多"。

30. Oktober um 01:18 · Gefällt mir

WCJ [第一團東西是第二團東西的"兩倍"那麼多] 的意思是

[第一團東西] 和 [第二團東西"弄兩次"] 一樣多。

首先要弄清楚兩件事。現在給定了某兩團東西。

(i) 兩團東西"一樣多" 的意思是什麼？

(ii) 這團東西"弄兩次" 是什麼意思？

30. Oktober um 01:20 · Gefällt mir · 2

WCJ 伸出你的左手，伸出你的右腳。如果沒有意外的話，手指頭和腳趾頭"一樣多"。如何說明這個"一樣多"？

30. Oktober um 01:21 · Gefällt mir

JYH x 小於一個有限值時,正整數是整數的兩倍
但趨近無限時,就變成一樣
感覺很怪

30. Oktober um 01:21 · Gefällt mir

WCJ 如果你說兩者的個數都是 5, 那我會追問, "個數是 5" 代表什麼?

30. Oktober um 01:21 · Gefällt mir

JYH 集合有 5 個元素

30. Oktober um 01:22 · Gefällt mir

WCJ (先回樓上, "個數是 5" 之於 "集合有 5 個元素" 只是換句話說而已, 並沒有回應到為什麼是 5 而不是 5000000 這個問題.)

"個數是多少" 這個問題在 "兩集合一不一樣多" 之後討論比較容易. 如果下過圍棋, 在猜子的時候雙方並不會數白棋拿幾個棋子, 而是用 "排" 的; 拿一桶 100 顆白子和 100 顆黑子問一個剛學數數的小朋友它們一不一樣多, 他們的辦法是?

30. Oktober um 01:26 · Gefällt mir

HSA 只是因為數學上沒辦法對個數作更好的定義而已 所以就用 1-1 onto 的函數定義

30. Oktober um 01:27 via Handy · Gefällt mir

JBH 這就是整數的個數, 讀作 "aleph naught" 或叫做 "阿列夫零", 是最小的無窮基數, 把它乘以 2, 3, 10000 甚至乘以 aleph naught 其大小都不變。

JBHs Foto



30. Oktober um 01:27 · Gefällt mir · 4

WCJ 應該是用排的. 也就是 "排" 是 [兩集合是否 "一樣多"] 更為直觀的判斷方式. 而 "排排站" 在數學上正是帶有 one-to-one, onto 的想法. 遂以 "排" (即 bijection) 的方式定義兩集合 "一樣多".

30. Oktober um 01:29 · Bearbeitet · Gefällt mir

HSA 如果說 "A 集合比 B 集合小 iff A 是 B 的嚴格子集" 的話 我們就沒辦法比較奇數和偶數的數量

30. Oktober um 01:33 via Handy · Bearbeitet · Gefällt mir

HSA 為了讓 "大小" 的概念對所有集合都有意義 才用 cardinal 定義

30. Oktober um 01:30 via Handy · Bearbeitet · Gefällt mir

WCJ 在這樣的想法下, 定義 [A 和 B 一樣多] 為 [存在從 A 到 B 的 bijection (對射)]. 此刻, 強大的函數概念告訴我們從 A 到 B 的 bijection 和從 B 到 A 的 bijection 意思是差不多的, 直觀上都表達兩者的元素 "剛剛好對齊". 然後有 A 少於 (未必嚴格少) B 的定義, 它是 [存在 1-1 函數 (對應), 映 A 到 B]. 強大的函數理論告訴我們, 這個定義等價於 [存在映成 (onto) 函數從 B 映至 A] (反回去需要選擇公理).

30. Oktober um 01:57 · Bearbeitet · Gefällt mir

WCJ 此時, 有了 "一樣多" 和 "誰比較多" 的概念, 才可以正式定義 "個數". 事實上, 個數就是選定特定的集合當 "標準". 我相信每個人看見 3 顆蘋果的時候都會有個代表 "3 個" 的 "標準", 我的標準是數數的節拍 --- 3 拍. 在集合論上, 也同樣地會造出一些集合作為標準.

30. Oktober um 01:49 · Bearbeitet · Gefällt mir · 1

HSA 無限 => 無限大的麻煩

30. Oktober um 01:38 · Gefällt mir · 3

HSA 樓樓樓上最後一句的定義打錯了吧 = =

30. Oktober um 01:40 · Gefällt mir

WCJ 允許使用自然數的話, 那個標準是 $\{1, \dots, n\}$ 代表 n 個元素. 凡是和 $\{1, \dots, n\}$ "一樣多" 的集合稱作 " n 個". 可證得一個具有 " n 個" 元素的集合的個數不會是另一個 " m 個". 自然數, 或大集合的個數就懶得這樣作 (其實 in some sense 是不會做或是不 care), 遂直接給符號.

30. Oktober um 01:41 · Gefällt mir

WCJ 如果不允許自然數的話, 事情會很大條. 此外, aleph 0, aleph 1 等, 所代表的意思 (也就是不純然把它當符號(symbol)來看待), 還有一些細節, 都是集合論精采的地方 (數學本科系也普遍不談).

30. Oktober um 01:44 · Bearbeitet · Gefällt mir

HSA $A \leq B$ 的定義應該是 存在 A 到 B 的 1-1 函數
 $A < B$ 的定義是 $A \leq B$ 且 $A \neq B$

30. Oktober um 01:44 · Gefällt mir · 1

JBH 維基百科有許多關於這方面的知識, 若想更了解集合論的知識, 可以去看看。

30. Oktober um 01:47 · Gefällt mir

HSA <http://us.metamath.org>

我覺得這個網站也滿不錯的

30. Oktober um 01:52 via Handy · Bearbeitet · Gefällt mir · 1

WCJ 我改考卷疑似有看過樓上上的名字

30. Oktober um 01:53 · Gefällt mir

JBH WCJ 也許是同名的人吧!我不認識你

30. Oktober um 01:57 · Gefällt mir

WCJ Sorry, 謝謝提醒. 是未必嚴格少的少於, 英文是 be dominated by. 這個在中文不知道有沒有簡單又漂亮的詞可以用.

30. Oktober um 01:59 · Bearbeitet · Gefällt mir

JJU 到無窮大之後, 很多東西都不直覺了。

順便告訴你吧, 有理數也跟正整數一樣多喔~

30. Oktober um 14:55 · Bearbeitet · Gefällt mir · 1

JBH 樓上說的沒錯!而且無理數遠比有理數多!

30. Oktober um 19:03 · Gefällt mir · 1

WCJ 事實上, 整數個數是自然數個數的兩倍這件事是沒有錯的.

30. Oktober um 19:05 · Gefällt mir

WCJ 整數個數是自然數個數的兩倍再多一個也是沒有錯. 熟知那些無窮勢(cardinality)的運算之後, 它們都和自然數個數一樣多, 而且沒有導致任何衝突.

30. Oktober um 19:07 · Bearbeitet · Gefällt mir

RCH 問一下題外話 無限大是定義? 還是數的一種?

30. Oktober um 20:45 · Gefällt mir

TSD 怎麼說明無理數比有理數多?

30. Oktober um 20:45 · Gefällt mir

HSA Cantor 的啥 diagonal 的

30. Oktober um 20:47 via Handy · Gefällt mir

JBH 張家睿 "無窮大"是一"種"數", 屬於"超窮數", "超窮數"大於"有窮數"。

30. Oktober um 21:35 · Gefällt mir · 1

LIT one to one & countable

30. Oktober um 21:41 · Gefällt mir

LLH 不需要討論"無窮大"本身的意義

只要把無窮集定義為有限集以外的集合就好了

30. Oktober um 21:52 · Gefällt mir

RCH 那能拿它來比大小嗎? 還是無意義?

30. Oktober um 22:01 · Gefällt mir

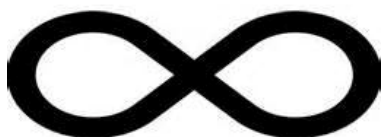
JBH 事實上"無窮大"亦即"超限數"是有大小之分的, 並且遵守和"有限數"不太一樣的性質, 所以

比較無窮的大小絕對是有意義的!

30. Oktober um 22:40 · Gefällt mir

JBH 但這個代表無限的符號並不是數，這符號只代表它是大於所有有限數的值，但沒有說明它是何種大小的無窮，這也不是超限數的正確表示法。

JBHs Foto



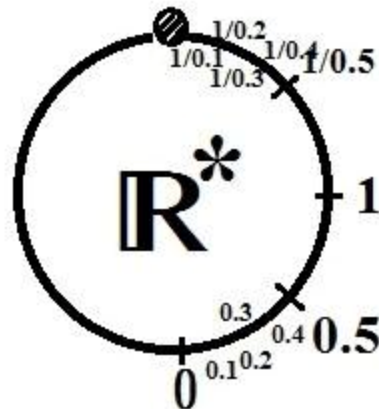
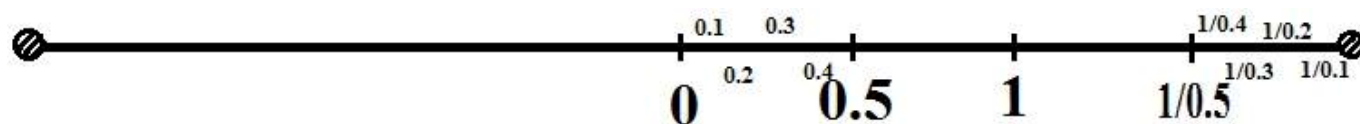
30. Oktober um 22:49 · Gefällt mir · 2

WCJ 數學家探討無限大這件事是具體而不帶含糊的，就算表達方式僅僅點到為止 (其實是根本沒有講白)，但是細問還是會有嚴謹的想法。

如果把實數線畫成這樣，也就是把大於 1 的實數擠進小小的範圍(這當然是可以的，而且它不會破壞大小順序，只是運算的時候不能再用量的罷了) 而且負方類比，那麼最上方會有一個縫。此時把它添加一個元素 (這點在集合論上很容易做到)，把它記作 ∞ ，如此一來即可探討 ∞ 附近的點。

這樣的搞法對複數集比較好用，它甚至可以用來討論球的性質。在複變數函數論裡面有很多美不勝收的結果。

WCJs Foto



31. Oktober um 10:08 · Gefällt mir · 3

WCJ 以上的做法在拓撲學裡稱作單點緊致化。但是在微積分或實變數函數理論一般比較喜歡這樣玩：添加兩個點。如此一來，對初學微積分的人來說，在定義 $\lim (x \rightarrow +\infty) = +\infty$ 的時候可以有圖像的理解，也算一件好事。

多了兩個東西的新集合，勢必要對這兩個元素與既有的元素之間給個運算規則以及順序。不給也可以，只是給了可以把事情表達得比較好。順序(大小關係)是很好給的，而無限大的某些運算在直觀下是歧義的(我是指不同情況下會得到不同的結果)，遂不定義。例如可找到兩塊面積 ∞ 的區域相扣，剩餘面積為一個給定的實數。

你當然可以亂定，為了達成你心裡想要表達的概念。如果你看過遊戲王(動畫版)，有一集有個叫蛇神凱還什麼來著，就出現一隻戰鬥力 ∞ 攻擊另一隻戰鬥力 ∞ 的。我覺得他在亂搞，但他如果堅持兩隻攻擊力 ∞ 的怪獸具有同樣攻擊力那我也沒辦法....

概括地說，在數學的觀點，無限大不純然是個 "概念"。