作業九

9721201 王重臻

一、 記得 lim (1+1/n)^n [1 加 n 分之一括號的 n 次方] = e (當 n --> 無限大), 這是 e 的定義

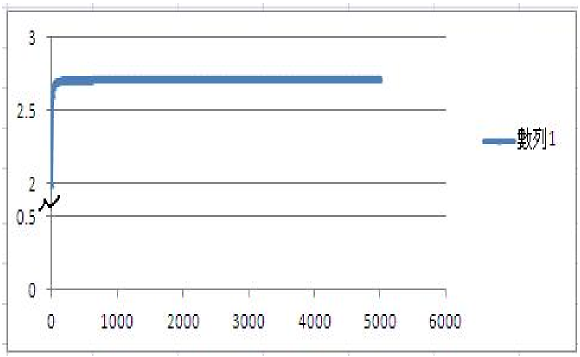
1. 請將 n = 0.1, 0.01, 0.001 代入 (1+1/n)^n 中用小計算機計算(也許要用到對數), 將結果寫出, 測試一下 e 的值大概是多少
2. 請將 n = 0.1, 0.01, 0.001 代入 (1+1/n^2)^n 中用小計算機計算(也許要用到對數), 也將結果寫出, 測試一下 (1+1/n^2)^n (把前小題中括號裡的 n 改為 n 平方) 的極限是否為 1
3. 同前小題, 但改為 (1 - 1/n^2)^n
4. 請據此說明: (1-1/n)^n 的極限是什麼? (當 n --> 無限大)
5. 請推論 (不用計算) (1-1/n)^(n^2) 的極限 (把前小題括號外的指數 n 改為 n 平方)

[答]

1. 實測結果如下：

2001	2.717603
2011	2.717606
2021	2.71761
2031	2.717613
2041	2.717616
2051	2.717619
2061	2.717623
2071	2.717626
2081	2.717629
2091	2.717632
2101	2.717635

4901	2.718005
4911	2.718005
4921	2.718006
4931	2.718006
4941	2.718007
4951	2.718007
4961	2.718008
4971	2.718008
4981	2.718009
4991	2.71801
5001	2.71801



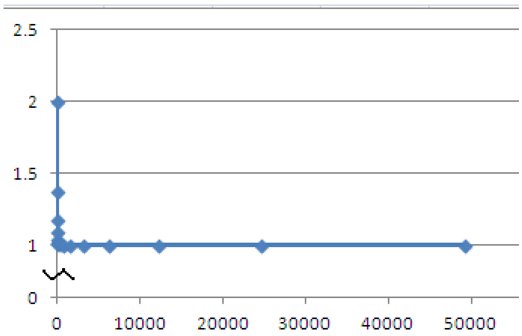
在第 2000 項時，其值接近 2.7176，但在第 5000 項時 2.7180，由此我們覺得它收斂的效率挺差，我們無法確知確切的極限的前三位小數是否為 2.718。

8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288
2.718116	2.718199	2.71824	2.718261	2.718271	2.718277	2.718279
1048576	2097152	4194304	8388608	16777216	33554432	67108864
2.718281	2.718281	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282	2.718282

不過如果做到數百萬項，我們大概就會相信極限值約是 2.718282...

2. 如下表的數值：

1	2
3	1.371742
6	1.178678
12	1.086591
24	1.042509
48	1.021047
96	1.010471
192	1.005222
384	1.002608
768	1.001303
1536	1.000651
3072	1.000326
6144	1.000163
12288	1.000081
24576	1.000041
49152	1.00002



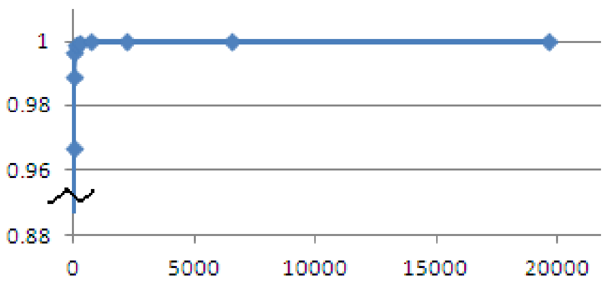
我們不難相信它收斂到 1。

事實上

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n^2\to\infty}} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e} = 1$$

3. 它的極限不難被察覺到是 1。

1	0.9
3	0.967036
9	0.988944
27	0.996303
81	0.998766
243	0.999589
729	0.999863
2187	0.999954
6561	0.999985
19683	0.999995



4. 倘若我們相信

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n = 1，$$

那麼根據

$$(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n$$

我們勢必發現它們的趨限必有這種關係：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n$$

即

$$e\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = 1$$

是故

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = 1/e \text{ 。}$$

5. 由於

$$(1-\frac{1}{n})^{n^2}=\left[(1-\frac{1}{n})^n\right]^n$$

又， $(1-\frac{1}{n})^n \to 1/e<1$，因此當 n 夠大時，$(1-\frac{1}{n})^n$ 的值都會在 1 以下。對於這樣的值取 n 次方，我們會發現當 n 越大時所得的值將向 0 逼近，因此極限是 0 是可信的結果。

二、 試對布阿松分配的三項假設提出評論: 直覺上它們合理嗎? 在什麼情況下合理? 在什麼情況下就不那麼合理了?

[答]

當我們公平地對待區間 ω 中的每一個點時———此處的公平是指每個點都應有同等被選擇的可能———則 Poisson 的假設就是合情合理的。如果 Poisson 分佈這套「數學模型」的來原是關於保險類的風險管理，那麼三個假設以直觀來看並無不妥，且為必要的假定。相對地，如果所探討的實例的區間 ω 是個在不同時間對於該事件的發生與否會相互干擾的類型，用 Poisson 分佈剖析它勢必不會準確。

評論：學弟你超認真的，不論是在課堂上還是作業的積極度，都很優秀。這次作業寫得很棒，沒甚麼問題。