

## 作業八

9721201 王重臻

1. 一個銅板出現正面的機率為  $p$ ，將它投 3 次，若出現 0 次正面，就可以得到 5 元，若出現  $k$  次正面，就可以得到  $9/k$  元；令  $X$  為得到的錢數，試寫出  $X$  的 p.d.f. (probability density function)

[答]

我們把資訊做成如下表的模式。

$$0 \text{ 次} \rightarrow 5 \text{ 元} \rightarrow P_0 = (1-p)^3$$

$$1 \text{ 次} \rightarrow 9 \text{ 元} \rightarrow P_1 = C(3,1) \cdot p \cdot (1-p)^2$$

$$2 \text{ 次} \rightarrow 3 \text{ 元} \rightarrow P_2 = C(3,2) \cdot p^2 \cdot (1-p)$$

$$3 \text{ 次} \rightarrow 1 \text{ 元} \rightarrow P_3 = C(3,3) \cdot p^3$$

由此我們得出一個 p.d.f.  $f: R \rightarrow R$  滿足：

$$f(x) =$$

$$(1-p)^3 \quad \text{當 } x = 5;$$

$$C(3,1) \cdot p \cdot (1-p)^2 \quad \text{當 } x = 9;$$

$$C(3,2) \cdot p^2 \cdot (1-p) \quad \text{當 } x = 3;$$

$$C(3,3) \cdot p^3 \quad \text{當 } x = 1;$$

$$0 \quad \text{其他情形。}$$

2. 在  $(0,1)$  區間中無偏好地任選一個點  $Y$ ，令  $X = 1/Y$ ，

a. 試導出  $X$  的 p.d.f.  $f(x) = -1/x^2$  ( $x$  平方分之-1)，當  $x > 1$ ;  $f(x) = 0$ ，當  $x < 1$  或  $x = 1$

b. 如果只用感覺，你會覺得  $X$  出現在 1 附近的機率大些，還是出現在 10 附近的機率大些？

c. 利用「a.」中求出的密度函數，估計  $\Pr[1 < X < 1.1]$  和  $\Pr[10 < X < 10.1]$  (所謂估計就是近似值，當差額很小時，例如差額為 0.1,  $X$  落在此小範圍內的機率就近似於該處的密度乘以差額)

[答]

a. 欲考慮  $X$  的 p.d.f. 先考慮  $x$  在  $(1, \infty)$  附近的區間，即取值落在  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  時的機率。當  $X$  的取值落在  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  時，意味著  $Y$  的取值落在區間

$$(1/(x + \Delta x), 1/(x - \Delta x))$$

之中，此機率

$$\begin{aligned} \Pr[x - \Delta x < X < x + \Delta x] &= \Pr[1/(x + \Delta x) < y < 1/(x - \Delta x)] \\ &= 1/(x - \Delta x) - 1/(x + \Delta x)。 \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} & \{1/(x - \Delta x) - 1/(x + \Delta x)\} / \{2\Delta x\} \\ &= \{2\Delta x\} / \{(x - \Delta x)(x + \Delta x)2\Delta x\} \\ &= 1 / \{(x - \Delta x)(x + \Delta x)\} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 / \{(x - \Delta x)(x + \Delta x)\} = 1 / \{x^2\}$$

而對於其他  $x$  的取值則全為 0。

b. 當  $X$  取值越大時， $Y$  的對應數字也越大，且變化幅度亦越劇烈，因此直觀的想法將我們導向 “10 附近的機率大”。

$$\begin{aligned} \text{c. } \Pr[1 < x < 1.1] &> (1 / 1.1^2) \cdot 0.1 \\ &> 0.082 > 0.001 = (1 / 10^2) \cdot 0.1 \\ &> \Pr[10 < x < 10.1] \end{aligned}$$

所以我猜錯了！這意味著直觀並不是那麼容易導向正確的答案。

評論：寫得不錯，觀念大致沒問題。但第一題 2 次應該是 4.5 元、3 次應該是 3 元，這地方有誤。第二題寫得蠻好。