作業七

9721201　W.S.P(註: 此爲代碼)

一、 請導出:　當Δx→0, lim Δsinx/Δx = d sinx /dx = cos x; 運用以下定義

1. 半徑爲 1 的圓上, 角度 x 意指 x 所對的弧長爲 x 。
2. sinx = 對邊/斜邊。

〔答〕

在座標平面上，以原點 O 爲圓心且 1 爲半徑作圓。取(1,0)爲 A，第一象限的圓周上的一點 B。以θ表 AOB 的角，並且在角度爲θ+Δθ處標示出點 C。分別對 B,C 兩點做出垂直 x 軸的垂線，且垂足點爲 B’,C’ 。再對 B 做水平線，交 CC’於 D, 考察

$$\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta \quad ,$$

我們發現它是 CD 長，並且Δθ爲弧 BC 長。當Δθ很小時，弧 BC 可以當作一條直線看待。此時，我們看待「圖形」BDC，由於 AOB 爲θ，故 OBD 亦爲θ，由於Δθ很小，因此 OBC 可視爲直角，因此 DBC 爲θ之補角。又 BDC 爲直角三角形，DCB 也是θ。故

$$\{\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta\} / \Delta\theta$$

其實是 CD/BC，因此它正是 cosθ。此時Δθ已經很小。故我們發現

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\{\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta\} / \Delta\theta = \cos\theta \ 。$$

二、 設 x 的值均勻地分佈在[0,1]區間, 也可以說, x 是從[0,1]區間中無偏好地任選的一個值; 我們用這個 x 爲邊長做一個正方形, 把它的面積叫做 y, 換言之, y=x^2。

1. 如果 x 是[0,1]區間外的點, 那麼 x 處的機率密度就應該是 0, 因爲根據假設, x 根本就不可能出現在[0,1]區間之外; 那麼, 當 x 是[0,1]區間內的點, x 點的機率密度應該爲何?
2. 讓我們設定一個 x 的值爲 a, x 落在 a 附近的一個Δx 範圍內的機率,　以 Pr [a<x<a+Δx]代表, 就應該是Δx; 那麼, Pr [b<y<(a+Δx)^2] 爲何? 當然的, 此處的 b = a^2　[Pr 是 probability 的縮寫, 中括號 [....] 代表事件; Pr[...]意爲 [....]事件發生的機率]

〔答〕

(1) 由於點的分佈是均勻的，在長度爲 1 的區間裡共用全體的機率，因此

$$1/1 = 1$$

(2) 當 y 滿足 $a^2 < y < (a+\Delta x)^2$時，意味著 $a < x < a+\Delta x$，因此

$$\Pr[a^2 < y < (a+\Delta x)^2] = \Pr[a < x < a+\Delta x] = \Delta x$$

3. y 在 b 點處的機率密度應該是 lim Pr [b<y<b+Δy]/ Δy　當Δx 或Δy →0 時; 請証明 y 在 b 處

的機率密度爲 1/2a [比較「2.」和「3.」中的表示法, 應該可以找到Δx 和Δy 之間的關係]

4. 如果都用 y 來表示而不涉及 x, 請說明 y 在 y 處的機率密度爲 「(2 倍的根號 y)分之一」
5. 請說明: 當Δy 很小的時候, Pr [b<y<b+Δy] 應該近似於 (b 處的機率密度) 乘以Δy; 並利用它求出 正方形面積落在0.5和0.501之間的機率的近似值 (當它的邊長是無偏好地從[0,1]中任選時)

〔答〕

(3) 考慮 $\Pr[b < y < b + \Delta y]$。事實上我們知道當 Δx 很小時，Δy 也很小，且

$$(a + \Delta x)^2 = a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 \fallingdotseq a^2 + 2a\Delta x$$

又 $b = a^2$，因此

$\Pr[b < y < b + \Delta y]$

$= \Pr[\, a^2 < y < a^2 + 2a(\Delta y / 2a)] \fallingdotseq \Pr[\, a^2 < y < a^2 + 2a(\Delta y / 2a) + (\Delta y / 2a)^2]$

$= \Pr[\, a^2 < y < (a + (\Delta y / 2a))^2\,]$，

由上一題我們發現，當 Δy 很小時，

$$\Pr[\, a^2 < y < (a + (\Delta y / 2a))^2\,] = \Delta y / 2a$$

因此由機率密度的定義

$$\lim_{\Delta y\to 0} \Pr[b < y < b + \Delta y] = \lim_{\Delta y\to 0}(\Delta y / 2a) / \Delta y = 1 / 2a。$$

(4) 當 y 被選定爲某個 y 時，對應到的 x 值爲 sqrt(y)，此即上題的 a。故機率密度爲

1 / 2sqrt(y)

(5) 由我們對 P(y) = 1 / 2sqrt(y)的認識，若 y 的新取值僅比原取值多一點點，那麼 sqrt(y)的變化也將很微小，而取倒數也不致於有太大誤差，因此在 y 有極微小的變化之際，曲線可視爲水平線。所以機率即 b 乘以 Δy。

$\Pr[\, 0.5 < y < 0.501\,] = 0.001 * 0.5 = 0.0005$。

評論：大致寫得標準，不過最後一題不是這樣計算吧。