

作業六

9721201 W. S. P (註: 此為代碼)

一、請思考「Cantor Theorem」的證明 (也可以參考平台上的補充資料 p.s.過兩天會放上來)

1. 提出一個百思不得其解的疑點。

[答] 即使已經完成思路的模擬，就算證明也落筆完成，但直觀的想法多少仍會排拒接受它為事實。我們總會把 A 視為非常巨大、太過雜亂的集合，但我們筆下做的事情卻是對付那些「不怎麼大」的集合的「對角線法」。用同樣的做法對付任意集合，任意大，或僅僅有限的集合，真的有效嗎？直覺上，我們是否真能相信所有的集合都會任我們以同樣單純的方式擺佈？所以，我的疑慮在於：這樣的敘述「真的是真的」嗎？

2. 提出一個感想、心得、或評論。

[答] 縱觀整個證明過程，讓我最感到震撼的事情並不是證明的邏輯嚴謹性，而是人的思維的巧妙——我始終好奇著 Cantor 究竟如何想到「對角線證法」。那就竟是神來一筆，就這樣給他想到了？又或者是他經歷漫長的鋪陳，而這樣的證明只是最終的精華而已？當我首次面對這道問題時（我刻意不看證明），我總感到一種難以訴說的不可思議。一邊代表著自然數全體，另一邊代表著實數全體，當筆尖滲透了這行字跡“令 $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ ”之後，剩下的想法除了納悶，就是一片空白。當我見到了 Cantor 的對角線法，才大感不可思議，那簡直太妙了！但一轉眼，當我試著用另一種方式應對它時，卻發現思緒又停留在“令 $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ ”，心情始終擺脫不了對小數表法的眷戀。我第二個和第三個看到的證明分別利用 Nested Property，以及外測度理論，才赫然察覺到創造力是多麼令人震奮的事情。“令 $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ ”就像站立草原上的至高點，前方的廣闊總是令人讚歎令人迷惘，卻又暗藏無盡的驚奇！（我曾經讚歎過，這個證明究竟是 Cantor 獨創的，又或者是經過上帝指點的傑作？）

二、 2^N 代表自然數的所有子集所成的集合，它的任一元素(即自然數的一個子集)可以表示為一個由 0 和 1 構成的數列；運用這個表示法，套用「對角線法」，證明這些子集比自然數本身更多 (也就是在自然數的情況下，重寫一次 Cantor theorem 的簡版證明)。

[答]

用反證法，若 $2^N \approx N$ ，則 2^N 可寫為數列的型式 $\{B_1, B_2, \dots\}$ ，其中 B_j 和 B_k 為 N 的相異子集。現在我們要從 N 中挑一批數，讓這些數所成的集合 B 與每個 B_j 都不一樣。最簡易的造法即：利用 1 使 B_1 和 B 相異，利用 2 使 B_2 和 B 相異.....我們的選法是：倘若 j 在 B_j ，就讓 B 裡面沒有 j 。因此令

$$B = \{j \in N : j \notin B_j\}$$

給定一個 $n \in N$ ，要證明 $B_j \neq B$ 。讓我們關注 n 這個元素：若它在 B_n 之中，則它不會在 B 內，反之亦然，因此 n 一定只能在 B_n 和 B 之一。因此 $B_j \neq B$ ，即這個 B 不在序列中。但它必須在序列中，矛盾。故 $2^N > N$ 。

評論：

寫得很棒也很用心，不過第二題學弟是不是有放圖片還是輸入一些方程式，我用 2010 版的 word 看不到很多行，從開啓和反白也是一樣。