

一、請回顧之前的作業，主要是作業三和四，但也可以抱括二和一，從其中挑選覺得還可以再修改或發揮的一題：

1. 請重新書寫這一題
2. 請對這一題的「再生」發表一點評論和感想

[答]

我們已經理解  $|R| > |N|$ ，並且知道其中的運作模式。對於  $2^{|N|} > |N|$  我們也有類似的體驗。在論證過程中我們把  $\alpha \in R$  和  $f \in 2^N$  視為同一類的物件，並且從對角法得出我們期望的結論。讓我覺得有意思的是，我們可以順勢地問下去：是否  $2^{|R|} > |R|$ ？是否對任何  $A$ ，皆有  $2^{|A|} > |A|$ ？

對於前者，我們可以修改 Cantor 的對角法，好讓原先的論證可以更完美地呈現。假定  $f$  為映  $[0,1]$  至  $2^{[0,1]}$  不重複且不遺漏的對應。我們的想法是，就把它仿造舊有的證明，把  $2^R$  的所有元素列下來，如下：

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow f(0) = \{ f(0)(0) \sim f(0)(0.001) \sim f(0)(0.(3)) \sim f(0)(\frac{\sqrt{2}}{2}) \sim \dots f(0)(1) \} \\
 &\{ \\
 0.001 &\rightarrow f(0.001) = \{ f(0.001)(0) \sim f(0.001)(0.001) \sim f(0.001)(0.(3)) \sim f(0.001)(\frac{\sqrt{2}}{2}) \sim \dots f(0.001)(1) \} \\
 &\{ \\
 &\{ \\
 0.(3) &\rightarrow f(0.(3)) = \{ f(0.(3))(0) \sim f(0.(3))(0.001) \sim f(0.(3))(0.(3)) \sim f(0.(3))(\frac{\sqrt{2}}{2}) \sim \dots f(0.(3))(1) \} \\
 &\{ \\
 \sqrt{2}/2 &\rightarrow f(\sqrt{2}/2) = \{ f(\frac{\sqrt{2}}{2})(0) \sim f(\frac{\sqrt{2}}{2})(0.001) \sim f(\frac{\sqrt{2}}{2})(0.(3)) \sim f(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) \sim \dots f(\frac{\sqrt{2}}{2})(1) \} \\
 &\{ \\
 &\{ \\
 1 &\rightarrow f(1) = \{ f(1)(0) \sim f(1)(0.001) \sim f(1)(0.(3)) \sim f(1)(\frac{\sqrt{2}}{2}) \sim \dots f(1)(1) \}
 \end{aligned}$$

此時，我們只要利用「對角線」，造一個  $g$ ，使得  $g(0), g(0.001), g(0.(3)), g(\frac{\sqrt{2}}{2}), g(1)$  都和對角線上的不等即可造成矛盾。事實上這樣的證明與上圖的排序並無關係，因此，推廣到任意集合時也通用。

二、請針對「零點九循環等於 1」或「質數有無窮多個」或其它可以用歸謬法証明的例子，發表一點心得或評論或感想

[答]

[反駁] 對於課堂上，設定  $0.(9)$  為固定點的背後想法，我認為是一種顧左右而言他，不切實際且逃避問題核心的說法。因為  $0.(9)$  具有“靜止”和“變動”的“雙重性格”，然而，經過一堂課的“對峙”，這兩種性格反而被解釋得更不清楚，因為情感上的死結並沒有因此而解開。直覺地說， $0.(9)$  本身就具有它應有的性質——它身在數學世界裡可被視為一個獨立的角色，一個有性格（性質）的角色，那樣的性格本身就在那裡了，若是靜止則將不會是變動的，若是變動的則不可以是靜止。也就是我們並沒有理由宣稱我們可以選擇用何種觀點看待它。另一種解釋是：我們已確立，用兩種不同的觀點將得出相反的結果，但比較容易為我們所認同的性質——三一律——卻不准許這樣的相反結果。反推回來，我們勢必沒有選擇所持觀點的機會。

[立論] 上回我選擇刻意和題旨「唱反調」，這回我想替「靜止」這個性格「護航」。然未曾點出也未曾有辦法直接點出  $0.(9)$  的位置，但是我們有理由確信有那麼一個點——我們難逃「極限」這個概念，但可以避開「極限」兩個字。我們可以說，在點「調動」的過程中，它們會有一個「傾向」到達的點，這樣的一個點可以和過程中的那些點「任意地」接近。i.e. 從  $0.9, 0.99, \dots, 0.99999..9, \dots$  的分佈圖來看，我們堅信有這樣的點。如果從這個角度來看，我們將明確區分  $0.9$  和  $0.(9)$  在「本質上」的差異——前者是明確的點，後者是「揣摩」出來的點。於是，對於有限小數，我們可視為是一個無窮小數 e.g.  $1.234 \Leftrightarrow 1.234(0)$ 。如此一來，藉由對這種「趨勢」的直觀認識，我們可藉由

$$X := 0.9999999\cdots$$

$$\rightarrow 10X = 9.9999999\cdots$$

$$\rightarrow X = 1$$

的簡明手法得出  $X = 1$ （那股趨勢直指著 1）。

[佐證] 事實上，我們未曾仔細地探究  $1 \div 3 = 0.333\cdots$  究竟是如何產生的。藉由直式除法，我們不難發現一些事情：

$$\begin{aligned} 1 &= 3 \times 0 + 1 \\ 1 &= 3 \times 0.3 + 0.1 \\ 1 &= 3 \times 0.33 + 0.01 \\ 1 &= 3 \times 0.333 + 0.001 \\ 1 &= 3 \times 0.3333 + 0.0001 \\ &\dots \end{aligned}$$

早在做除法時我們就因為「草率行事」而「莫名地」把  $1 \div 3$  的值寫成  $0.333\cdots$ ，但是我們事實上看到的是：它比 0.3 多，比 0.33 多，比 0.333 多……，而多的幅度朝著 0 迅速減小，如此而已。如果要把除法的運算結果明確地標記為  $0.(3)$ ，那麼勢必得依靠著某種趨勢，數值隨著小數位增加而傾向的趨勢——事實上，我們的看著計算機上的「0.3333333」而「偷懶地」寫成「0.3333…」背後的想法正是：反正誤差會越來越小，小到 0。如此的回顧不僅把心中的疑慮打從根底剷除了，也再次地映證了我們早已體會到無窮小數的意涵，但我們不是那麼知曉罷了。

評論：我覺得這一篇寫得超好，而且覺得學弟非常認真，希望學弟繼續保持。