作業 4

W.S.P.

一、現在, 想利用「長度為 1/10, 1/100, ...的線段 (可能有些重疊), 不可能涵蓋整個(0,1)區間」這個事實來論証: (0,1) 區間中的實數比自然數多

1. 請提出一個可能的錯誤論証, 並說明它錯在哪裡
2. 請運用歸謬法(反証法)提出一個正確的論証
3. 請試著說明, 為什麼歸謬法(從假設結論是錯的出發)行得通, 而其它方法總是行不通.

[答]

(1) 如果我們試圖從[0,1]區間的 0 開始, 每一次往右取長度為 $1/10^j$ 的閉區間。那麼我們勢必發現這堆區間會趨向 1/9 這一點。又因為每個區間至少有一點，因此在這樣的區間取法中，我們已經找到了Ｎ個點 (其中Ｎ表自然數個數)，但是從這堆區間之中扣除那些被選取的Ｎ個點，剩下的點依然多更多，再加上上述的做法只針對[0,1/9]，我們還有 8 倍長度的範圍保持原般不動。因此，[0,1]區間的點勢必要比自然數集多。

(2) 倘若(0,1)是可數的(和 N 一樣多), 則 (0,1) 可寫成$\{r_1, r_2, \ldots\}$, 對每個 r_j, 我們將要造一個閉區間蓋住 r_j, 且此區間能為我們做些有利的事. 事實上, 我們要給 r_j 的區間的長度是 $\frac{1}{10^j}$.

我們的具體做法是, 對 r_j, 取 $[r_j - \frac{1}{2\cdot 10^j}, r_j + \frac{1}{2\cdot 10^j}]$, 如此一來, 所有的區間會一同蓋住所有(0,1)區間的實數(r_j的區間會負責蓋住 r_j). 這代表這些區間的長度和必須 ≥ 1. 但它們的和事實上只有

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\frac{1}{9}$$

矛盾. 因此 (0,1)勢必比自然數集多.

(3) 這是一個非常無聊的問題。如果我們仔細抽絲剝繭，一步步分析何謂「比較多」，一切就豁然開朗了。有一方比較多代表雙方不同多；雙方同多代表有從一方對向另一方且不遺漏不重複的對應。這代表著，雙方不同多意味著並沒有這樣的對應。倘若我們拋棄歸謬法，那麼試問：我們要如何詮釋「並沒有這樣的對應」中的「並沒有」這三字？事實上「並沒有」意指「不應該有」,「不會有」，也就是「若有將是不合理的」。無聊之處明矣，這是語言問題。

二、讓我們用 0.9n9 代表 0.99......9(n 個 9), 換言之, 1－0.9n9 = 1/10^n = 10^(-n); 令 x 代表 0.9(循環)。那麼, x>0.9n9, 無論 n 是多少, 因為小數點後有無窮多個 9 總比 n 個 9 多。

1. 請利用以上的符號和提示, 運用歸謬法, 証明 x=1 (先假設 x<1, 總是能找到足夠大的 n, 使 10^(-n)< 1－x; 畫在數線上, 很容易就看出來了)
2. 如果有個人一直覺得 x 就是不到 1, 因為雖然是無窮多個 9, 但總還是和 1 差一點點啊; 請說明, 前項歸謬法証明, 如何能破解這種困惑 (也就是說, 一個邏輯上無可反駁的論証, 必須也要同時破解人心中可能的困惑, 才有價值)

[答]

(1) 首先我們並不否認, $0.(9) > 0.9_n := 0.999\ldots9$ (n 個 9)。如果 $1 > x := 0.(9)$，那麼 $1 - x > 0$。但我

們可以試著觀察對一個給定的數 n，0.9_n 與 1 之間的誤差：若我們希望 $0.9_n > x$，即 $1 - 0.9_n < 1 - x$，$1/10^n < 1 - x$，也就是 $n > \log\{1/(1 - x)\}$。對於滿足此式的 n 我們發現 $0.9_n > x = 0.(9) > 0.9_n$（我們第一句話就承認它了），也就是說

$$0.9_n > 0.9_n$$

因此，$1 = x$.

(2) 證明的用意是為了使一個敍述更被人所信服，是為了消彌關於它的種種疑慮。但是在前述的證明過程中，卻加深了某些事的疑慮。即使我們用了估計，用了算術等技巧看似推導出了 $1 = x$，但我們似乎一直在處理一個很弔詭（或者該說我們根本沒搞清楚）的東西，也就是 0.(9)。

我始終不認為 0.(9)是個明確的概念，甚至覺得它可以被視為「變動」的物件。當我們意圖在數線上尋找 0.(9)的時候，我們的做法正是從 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999,....不停調動它的位置。但它「最終」該「座落」何方，我們僅僅以它「傾向」到達的位置，這代表著：我們未曾明確地標示它是哪一點，也沒辦法標出。這是個用模糊的詞語描述概念的做法，所表達的想法勢必不精確。僅管如此，我們確定在調動點的位置的過程，它皆在 1 的左方。當所有在過程中所經過的點都在 1 的左方時，我們明確地掌握了屬於它的一般行為(趨勢)：既然它怎麼調動都在 1 的左方，到不了 1，乃至其右方，那麼當過程終了之時，它也必須在 1 的左方。（i.e. 倘若我們把每個被經過的點，即 0.9,0.99,0.999,0.9999,...，每經過一點標示一點，則，當停頓在每一步驟時，我們總看到被標示的點全聚集在 1 左方，且和 1 保有距離，僅管他們會漸漸往右方跑，儘管保有的距離會變小。因此，並沒有任何因素能夠把這些點堆上 1，乃至 1 的右方。因此，縱使以趨勢論，這些點也到不了 1）

於是我們用觀察得到了一個跟推論相反的結果，這代表著過程中也許有什麼概念不明確。然而，或許我們會認為依循「邏輯」所推得的結果比較可靠，但邏輯只不過是呈現我們思索的一種型式，與直觀的觀察具有同等的價值（畢竟邏輯正是我們對於自己的思考，推理方式的直觀觀察的結果）。也就是說，我認為 0.(9)與 1 的大小關係不應太果斷地下定論，也不應拿一個證明就宣稱自己的命題為正確，並試圖破解他人的相反見解！

三、請回顧作業三的第一題 (這是為前次作業沒答對的同學準備的補救措施): (如果作業三第一題的前 4 小題都答對了, 不論後兩小題如何, 這次的這個第三題就請跳過不要做; 怎麼知道上次答的對不對呢?看完這一題應該就知道了)

1. N = 所有自然數 = {1, 2, 3....}, 是一個集合, 不是一個 (等於無窮大的) 數字: 所以, 10^N 也應該是一個集合。如果我們說, 10^N 這個集合, 可以看成[0,1] 區間, 即介於 0 和 1 之間的所有實數, 那麼, 我們是怎麼解釋「10」的? 是怎麼把它們「看成」一樣的?在這個脈絡中。(請對這以上文字做一些猜想與反駁, 以便澄清它在說什麼)
2. 令 A={0,1}, A^N 會是怎樣的一個集合, 其中的元素會是什麼樣子?
3. 令 B = {1, 2, 3}，則 A^B 這個集合中有 8 個元素, 請問是哪 8 個? (有的時候要做到第 3 小題才知道第 1 小題是什麼意思)
4. B 的子集合(部分集合) 也是 8 個, 想想看, 可以運用前小題的結論得出這個結果嗎? (在 B 的 8 個子集合和 A^B 之間, 有一個自然的對應)
5. 証明: C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + ...+C(n,n) = 2^n

評論：我很喜歡你對數學的熱忱，也很喜歡你最後一題的解釋，記得七年多前，高中北區模擬考，曾經有出現一個問題：問$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$為多少。當時高中詳解說只要令$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$，可以等於$x=\sqrt{2+x}$，接著就可以求出$x=2$。當時還是高中的我，一臉疑惑拿著解答追問數學老師，問他：「為什麼可以直接這樣假設？」我的理由在於：「不能因為推論有結果，甚至符合於正確答案，就可以說一開始的假設正確。」

我記得當時舉出一個生活常見的例子，給我的高中數學老師：「如果我假設 1.蝴蝶是企鵝；2.企鵝會飛。我因為『利用三段式推論』可推出『蝴蝶會飛』，結果觀察蝴蝶真的會飛，所以就說我的二個假設是正確的。」

這非常瘋狂的錯誤，蝴蝶不是企鵝，企鵝也不會飛。但科學史上不也常常這樣嗎？大學時，我修哲學所的科學哲學課程時才發現，這再幾千年前亞里斯多德年代就有人提出。

但當時我的高中老師只丟回我一句話：「因為收斂，所以可以這樣假設。」

這句話我永遠記到現在，因為他並沒有回覆我，我內心渴望知道的事情，老師只是退後一步回答我(甚至可以說是逃避我的問題)而已。他並沒有告訴我：「我要怎麼知道它收斂？那為什麼收斂可以有資格這樣假設？」

直到後來我大學時雙主修數學系時，在沈老師的高微中才再度聽到這題，以及更深的探討。

看到學弟對數學有如此大的熱忱和想法，身為助教非常開心，此外，第二篇作業和第三篇作業因為學弟是用ＰＤＦ檔，我不知道該怎麼回覆你，所以想說一併在第四篇作業回覆你。

這三篇作業我覺得你寫得很棒，內容也看得出你非常用心。我也是個熱愛追求真理的人，一起努力一起鼓勵吧。