

作業 2

9721201 W.S.P (註: 此為代碼)

一、請就「全體不見得比部份多」這件事情，例如，自然數和正偶數「一樣多」，談一談直觀和理性之間的掙扎；並試著發展一些說法（而不是僅僅訴諸定義），以說服一個不願接受的人（想像有一個人面前，他就是不能接受「部份可以和全體一樣多」）。

〔答〕

任何一個概念的好壞、價值與它容易被人接受與否並無絕對的關係，換句話說，僅僅憑著「難以接受」而否定一個「看似弔詭」的「新想法」或許不是明智的行為。對於無窮集合「部分是否必小於全體」這個疑慮，此項「不直觀」的現象，我們有許多面相得以探討：

- (a) 經驗：經驗在知識的探索上有相當的地位，卻也常是邁向災難的絕佳途徑，走向破滅的危險道路——因為忽視了經驗內容的適用範圍。長期的生活與對世界的認識，讓我們察覺到「全體大於部分」。它是個再真實不過的事了，我們無從否認它。但為我們所不知的是，我們被侷限了，被我們的經驗範圍侷限。無窮大與無窮多根本不會在我們的經驗裡出現——我們遇不到無窮大的物體以及無窮多的物件，那麼我們拿既有的經驗套用經驗範圍之外的事又意味著什麼呢？就像跳箱，跳 50cm, 100cm, 150cm, 200cm, 250cm，我們都可以安然無恙，倘若我們就把這些經驗推廣到極大高度，如果我們真以為一切如故地從 101 掉落，後果將可想而知。（天曉得自由落體能為我們脆弱的身軀帶來多大傷害？我們並沒有經驗過。

—————經驗未必是可靠的

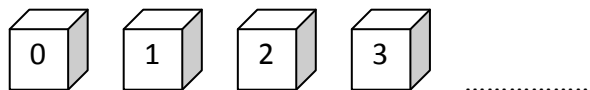
- (b) 用語：讓我們仔細回想該如何判斷物體的多寡。例如：

●●●●●● 與 ■■■■■■

就像圍棋一開始的猜子，我們是用「排」的方式將它們並列，並且發現它們將「不重複」且「無遺漏」地排得很好，此時，我們說它們個數相等。正是這樣的直覺讓我們產生了多與少的概念，且對於「生活上」的數數，我們發現了全體多於部分。但對於想像世界裡稍微複雜的集合，它們未必也未必要和既存的世界穩合，我們又為什麼要刻意保留那些「先入為主」的認識呢？

—————以「並列」判定多寡的約定是我們最初的認識也該是始終如一的判準

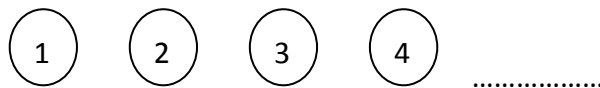
- (c) 矛盾：如果我們特別地講究直觀，把直觀當作第一考量，這何嘗是件壞事呢？也許我們可以進行如下的思想實驗：觀察這排箱子，每個箱子裡恰有一顆球，



此時，將球取出。



不難看出，上下個數相同。但當我們看見球上的標籤時，我們看見了：



我們事實上可以模擬出許許多多類似的實驗（事實上，它們都暗用了對應的想法）。我們可以選擇堅信「全體大於部分」，但這個實驗告訴我們，我們勢必得因此相信「部分可以既大於全體又等同全體」，其他的實驗甚至可以告訴我們「部分還小於全體」

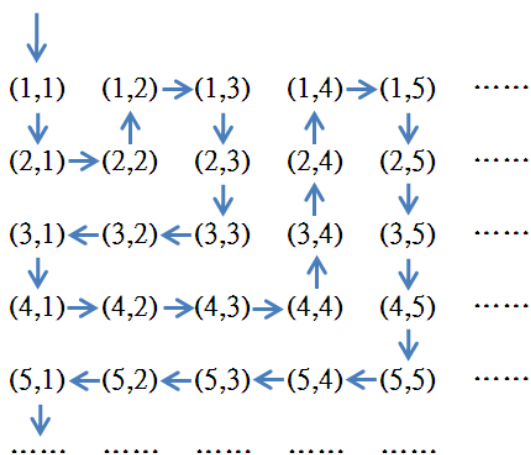
————舊有的直觀往往是侷限的，太過執著會導致弔詭的結果

相對地，若採用「對應」（當然，它也是最原始的認知）的定義，我們可以得出諸多和有限時相同的結果，這不僅是我們所寄望的結果，更是美麗的結果。

二、令 N 代表自然數的全體，令 $N \times N = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (3,1), (3,2), \dots\}$ ，也就是自然數數對 (m,n) 的全體；請想一個辦法說明它和自然數一樣多。那麼， $N \times N \times N$ ，也就是自然數三元組 (m,n,k) 的全體，也和自然數一樣多嗎？請儘量寫出自己的想法，當然也可以包括心中的疑惑，以及嚐試解決這疑惑的過程。

〔答〕

從「貪食蛇」與「迷宮」等遊戲，我們不難找到處理這個問題的靈感。



如果依照附圖的路線，我們可以發現：所有的數對總是在「某個時候」，或「某一步」被走到。而且這樣的走法是「不重複」且「不遺漏」的，依照我們的直觀與判準， $N \times N$ 和 N 是一樣多的。

我們稱第 k 步被走到的數對為「第 k 對」。為了說明 $N \times N \times N$ 也和 N 一樣多，我們需要如下的轉換——把下述的兩端視為相同：

$(1,1,1) \Leftrightarrow (\text{第 } 1 \text{ 對}, 1)$
 $(2,1,1) \Leftrightarrow (\text{第 } 2 \text{ 對}, 1)$
 $(2,2,1) \Leftrightarrow (\text{第 } 3 \text{ 對}, 1)$
...

以及

$(1,1,k) \Leftrightarrow (\text{第 } 1 \text{ 對}, k)$

$(2,1,k) \Leftrightarrow (\text{第 } 2 \text{ 對}, k)$

$(2,2,k) \Leftrightarrow (\text{第 } 3 \text{ 對}, k)$

...

因此，將上方表格中的 (k, m) 更改成 (第 k 對, m)，我們可以用同樣的方式證明出自然數可對齊(第 k 對, m)，而它又代表 (k_1, k_2, m) ，其中 k_1, k_2 要依循上述藍色走法得知。

除此之外，我們可以用另一種方式解它。我們視上述藍色的路線為走完 $1/4$ 平面的所有格子的路徑，那麼若要證明 N 和 $N \times N \times N$ 有同樣多的元素，我們就得「不重複地完整走完」第一卦限的格子，方法如下：

