

數學欣賞與學習 --- 作業一

Savoring and Learning of Mathematics --- Homework 1

9721201 W.S.P (註: 此為代碼)

一、請就今天上課的許多例子中，挑選一個說明個人的新的「了悟」，以及因此而對「理解」產生的新認識；或者，挑選一個例子說明心中的疑惑或 不以為然之處。

〔答〕

不同人對一個詞語的解釋總有區別。即使不是天壤之別，仍有微小差異，特別是「概念性」的詞語如「理解」。老師在課堂上用例子說明「理解」，但始終未明確地詮釋它，因此我始終「不理解」 「理解」本身。

對於和角公式 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ 的「理解」我既表讚歎也表遺憾。如果把「理解」二字界定為將概念圖型化，重新雕塑，直覺化，或類似貼近人心的轉化，那麼課堂的詮釋「美呆了」。我們也許正需要一句解釋滿足我們將右式合理化的渴望，我們似乎認為右式隱隱約約被某個事實駕馭著，而不僅僅來至於原子筆下的運算結果——這好比物理現象對於物理解釋，而 \sin 的重述搭配幾何的輔助，我們做到了。

另一方面，若說「理解」是對於主題的「研究動機」，「思想演進」，「理論推演」等的統合討論，那麼課堂上的詮釋將有矯揉造作，事後諸葛之嫌。首先，若以正弦律詮釋 \sin ，把角的特徵鎖進邊的性質是否有失幾何的本意更破壞了角的本質？其次，和角公式巧妙地連結和角與原角的關聯，課堂上的詮釋很難咀嚼出「和」的味道，反而只是邊與邊的湊合，失去了角；再者，三函有它的幾何性也可以有其代數性，倘若將一切刻意地閉鎖在「看得見」的幾何，那我們也損失太多美的事物！

總地來說，不同的立足點引導出不同的欣賞角度。

二、請就中學數學的範圍，挑選一個問題做一些思考，並將新的理解或體悟寫下來，並說明這個經驗讓人高興之處。

〔答〕

在高中中的範疇有一類很好玩的式子：

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$$

（當然，如果考試卷上出了求左式之值，那就一點都不好玩了。）我們即刻發現，左式是一團「爛」到幾乎不能再「爛」的式子，就像把少許代表「整潔」的數字放入名為碎紙機的開方運算之中，經過恣意地撕毀，擣碎，攪和，再黏接起來，居然變成 1！再怎麼有數感的人也許都不覺得它是整數，但它卻真的發生了。

更有趣的卻是它的「啓示」。當我們令 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = x$ 時，推出 $x^3 + 3x - 4 = 0$ ，藉由因式分解可得出 $x = 1$ 。倘若我們能適當地「湊數字」，我們最後將意外地從這個「亂七八糟」的運算，推出的一元三次方程式「亂七八糟」的公式解：

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{有一根爲} \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

評論:寫得蠻仔細，希望你會喜歡這門課，讓你更了解數學的美。