數列與函數的極限

觀察（複習）級數$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$，我們熟悉當$n\to\infty$時，其和$S=2$。現在，讓我們來探討級數的實際趨近情形。

Note: 以 S_n 表示級數的前 n 項和，並以 S 表示其極限。

例1. 我們若希望 $|S_n-S|<1$，即誤差值比 1 小。那麼我們需要加多少項？

[解] $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1(1-r^n)}{1/2}=2-2(\frac{1}{2})^{n+1}=2-\frac{1}{2^n}$。

因此 $|S_n-S|=\frac{1}{2^n}$。

欲使它 <1，必須有$\frac{1}{2^n}<1$，因此 n 可為任何自然數。

例2. 若希望$|S_n-S|<\frac{1}{100}$，則需加到哪一項？

[解] 承上，卻使$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}\ \Rightarrow\ 2^n>100\ \Rightarrow\ n>\log_2 100=6....$

故取 $n\geqq 7$。

例3. 假設加到第 N 項之後皆有$|S_n-S|<\frac{1}{1000}$，求 N。

[解一] 欲使$|S_n-S|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$，解不等式得 $n>log_2 1000$。

[解二] （一個轉換動作）如果能使

$$|S_n-S|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$$

則因為$\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}$，因此$|S_n-S|<\frac{1}{1000}$必然成立。

解不等式$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1024}$，得 $n>10$，因此可取 $N=10$。

註：在這裡我們要求的並不是 n 的所有範圍，而是要求出一個 N 使得只要比 N 大的數 n，皆滿足不等式。

例4. 設ε為大於 0 的正數，問從哪一項 (a_n)開始會滿足$|S_n-S|<\varepsilon$？

[解一] 同上，由$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$得出$n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，故只要把 N 取得比它大即可。

[解二]　（另一個轉換動作）因為 $2^n > n$ 恆成立，因此有

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} 。$$

若能使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，則將有 $|S_n - S| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$。

解不等式得 $n > \frac{1}{\varepsilon}$。因此可取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，則第 N 項之後的每一項 S_n 皆滿足 $|S_n - S| < \varepsilon$。

為了要把「趨近」的概念表述清楚，取代直觀但模糊的做法，我們將仿照上述誤差和估計的型式定義極限。

它的基本想法（原始構想）是：

> $a_n \to a$ 表示當 n 不斷增大時，a_n 將無止境地逼近 a，且要多接近 a 就能多接近 a。

把它講更清楚，就是：

> 給定誤差的限制 ε，此數列皆能在夠多項之後（第某個 N 項）與極限值(a)保持在要求的誤差範圍 ε 之內。

用數學的型式表示即為正式定義：

> $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 代表對任意的 $\varepsilon > 0$，皆存在 $N \in \mathbb{N}$，使得
>
> 若 $n \geq N$，則 $|a_n - a| < \varepsilon$

我們現在可以試著操作一些具體的例子：

例5. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

[證明]　給定誤差 ε>0，要找出夠大的項 $N =$ ___，且滿足

若　$n >$ ___　，則 $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$。

這就像要解 $\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ 的 n 的部分解。

由不等式解法

$$\left|\frac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

因此，取 N 為比 $\frac{2}{\varepsilon} - 1$ 大的自然數即可，可取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$。

對於函數極限的要求類似於數列極限的想法：

設 $f(x)$ 為已知。

$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow_{\text{定義}}$ 對任意的 $\varepsilon > 0$，皆存在 $\delta > 0$，滿足

若 $0 < |x-c| < \delta$，則 $|f(x) - L| < \varepsilon$。

例6. $\lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$.

[想法] (a) 若要求誤差 ε=1，則希望求出 δ_1=___，滿足

若 $0 < |x-1| <$ ___，則 $|(2x-3)-5| < 1$。

同樣地，這也像在解不等式 $|(2x-3)-5| < 1$，並且以 $|x-1| <$___ 的型式表示部分解。由

$2|x-1| = |(2x+3)-5| < 1$，得到 $|x-1| < 1/2$。

因此可取 $\delta_1 = \frac{1}{2}$。

(b) 要求誤差 $\varepsilon = \frac{1}{100}$，則類比，要解 $|(2x+3)-5| < \frac{1}{100}$，並以 $|x-1| <$___ 表示。因此可以取 $\delta_{\frac{1}{100}} = \frac{1}{500}$ （其實 $\frac{1}{200}$ 就夠小了。）

(c) 讓 ε 為任意正數，同樣地可取 $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$。 ($\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{50}, \frac{\varepsilon}{80000}, \frac{\varepsilon}{6\times 10^{23}}$ 都行)

[證明] 對任給的 ε >0，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 則每當 $0 < |x-1| < \delta$ 時，

$$|(2x+3)-5| = 2|x-1| < 2\delta = 2\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$ 。

註：怎麼取 δ 值是關鍵。

例7. $\lim_{x\to c} 1 = 1$.

[想法] 對任意的 ε >0，要找 δ = ___ > 0，滿足若 $0 < |x-c| <$ ___，$|1-1| < \varepsilon$。

此即解不等式 $|1-1| < \varepsilon$，並且以 $|x-c| <$ ___ 表示。

但 $0 < \varepsilon$ 恆成立，因此空格填任何正數皆可。

〔證明〕估計誤差 $|1-1|$=0。對任意的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = 1$，則每當 $0 < |x-c| < \delta$ 時，

$|1-1|$=0 < ε 。

例8. $\lim_{x\to c} \lvert x \rvert = \lvert c \rvert$.

[想法] 對 $\varepsilon > 0$，要找 δ = ___，使得只要 $0 < |x-c| <$ ___，$||x|-|c|| < \varepsilon$。類似地，我們即將求解，但在這之前得先使用一點技巧。

Key: 利用不等式 $||a|-|b|| \le |a-b|$，我們要估計誤差：

$$||x|-|c|| \le |x-c|$$

如果我們能讓此不等式右端 $|x-c| < \varepsilon$，則我們就滿足誤差要求。

而 $|x-c| < \varepsilon$ 恰好已經是解的型式，故可以取 $\delta = \varepsilon$。

[證明] 先估計誤差 $||x|-|c|| \le |x-c|$。對 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，則當 $0 < |x-c| < \delta$ 時

$$||x|-|c|| \le |x-c| < \delta = \varepsilon$$

例9. $\lim_{x \to 2} x^2 + 1 = 5$.

[想法] 對 $\varepsilon > 0$，需找需找 δ = ___ > 0 ，使得當 $0 < |x-2| <$ ___ 時，

$$0 < |(x^2+1) - 5| = |x+2|\ |x-2| < \varepsilon.$$

Key 1: 在前述幾題中，我們尋找 δ 時，都是從所有正數中尋找。因為 $|x+2|$ 是個不易控制的因素，我們嘗試在 1 以下的數值中尋找合適的 δ，也就是限制 $|x-2| < 1$。

此時有 $1 < x < 3$，因此 $|x+2| < 5$。這代表著在這個限制之下我們估計出

$$|(x^2+1) - 5| = |x+2|\ |x-2| < 5\ |x-2|.$$

Key 2: 對此，若我們能進一步地滿足 $5|x-2| < \varepsilon$，則我們將滿足誤差的要求（定義）。

但注意到，δ 的取法並不僅僅是 $\varepsilon/5$ 而已，因為我們在最初已經要求 δ 必須從 < 1 的正數尋找，因此 δ 應取 $\varepsilon/5$ 和 1 之中比較小的那一者（通常前者會比較小）。

[證明] 對 $\varepsilon > 0$，先限制 $|x-2|<1$，此時有 $1 < x < 3$，即 $|x+2| < 5$。在此限制之下估計誤差得

$$|(x^2+1) - 5| = |x+2|\ |x-2| < 5\ |x-2|.$$

此時，取 $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$，則當 $0 < |x-2| < \delta$ 時，必有

$$|(x^2+1) - 5| < 5\ |x-2| < \varepsilon.$$

例10. 例題：$\lim_{x \to 1} x^3 = 1$.

〔說明〕對 $\varepsilon > 0$，在估計誤差 $|x^3 - 1| = |x-1|\ |x^2 + x + 1|$ 時，與前題雷同，我們得先限制 $|x-1|$ 的範圍。不仿限制 $|x-1| < \frac{1}{2}$，此時，為有效掌控 $|x^2 + x + 1|$ 的值，我們先解出

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \rightarrow \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4} \rightarrow \frac{7}{4} < x^2 + x + 1 < \frac{19}{4} \rightarrow |x^2 + x + 1| < {}^{19}\!/_{4}.$$

因此，在限制之下，我們有

$$\left|x^3-1\right|=\left|x-1\right|\cdot\left|x^2+x+1\right|<\frac{19}{4}\left|x-1\right|$$

此時，只要使$\frac{19}{4}\left|x-1\right|<\varepsilon$即可。也就是可以取$\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{4\varepsilon}{19}\}$。證明仿照前題。

例11. ：$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x}=2$.

[說明] 對 $\varepsilon>0$，為了觀察 $x=2$ 附近的行為，我們就把目標侷限在 $|x-2|<1$ 之內吧（先確保 x 在這範圍內皆 >0）！估計誤差

$$\left|\sqrt{2x}-2\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\sqrt{2x}+2}\right|=\frac{2}{\sqrt{2x}+2}\left|x-2\right|$$

由於我們已限制 x 的範圍，此時$\frac{2}{\sqrt{2x}+2}$的值是可以掌握的。由 $|x-2|<1$， $1<x<3$，有$\sqrt{2}+2<\sqrt{2x}+2<\sqrt{6}+2$。故$\frac{1}{\sqrt{2x}+2}<\frac{1}{2+\sqrt{2}}<\frac{1}{2}$。因此，

$$\frac{2}{\sqrt{2x}+2}\left|x-2\right|<\frac{2}{2}\left|x-2\right|$$

若能使上式右端 $<\ \varepsilon$，則任務完成。我們可以取$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{100000}\}$。完整的證明可類比於前。

例12. ：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{5}$.

[證明] 對 $\varepsilon>0$，先限制$|x-2|<2$。此時估計誤差

$$\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}\right|=\left|\frac{x-2}{5\cdot(x+3)}\right|=\frac{1}{5\cdot(x+3)}\left|x-2\right|\text{。}$$

在限制範圍內，我們發現 $0<x<4$，因此，$\frac{1}{5\cdot(x+3)}<\frac{1}{15}$也就是

$$\frac{1}{5\cdot(x+3)}\left|x-2\right|<\frac{1}{15}\left|x-2\right|$$

取 $\delta=\min\{2, 15\varepsilon\}$，則當 $0<|x-2|<\delta$時，

$$\left|\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}\right|<\frac{1}{15}\left|x-2\right|<\frac{1}{15}\delta\le\frac{1}{15}15\varepsilon=\varepsilon\text{。}$$

例13. ：$\lim\limits_{x\to 1}\left|1-6x\right|=5$.

[證明] 對 $\varepsilon>0$，我們先估計誤差

$$\left|\,|1-6x|-5\right| = \left|\,|1-6x|-|-5|\,\right| \le |(1-6x)-(-5)| = 6\cdot|x-1|$$

此時取 $\delta = \varepsilon/6$，則每當 $0 < |x-1| < \delta$ 時，

$$\left|\,|1-6x|-5\right| \le 6\cdot|x-1| < 6\delta = 6\cdot\varepsilon/6 = \varepsilon$$

例14. ：$\lim_{x\to 1}\sin x = \sin 1$. [玩好玩的]

〔證明〕對 $\varepsilon>0$，我們要估計誤差 $|\sin x - \sin 1|$。先限制 $|x-1|<\pi$，則根據不等式〔註〕，我們有

$$|\sin x - \sin 1| = 2\left|\cos(\frac{x+1}{2})\right|\cdot\left|\sin(\frac{x-1}{2})\right| < 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-1}{2}\right| = |x-1| \text{。}$$

取 $\delta=\min\{\pi, \varepsilon\}$，則每當 $0 < |x-1| < \delta$ 時，必有

$$|\sin x - \sin 1| < |x-1| < \varepsilon \text{。}$$

〔註〕此不等式為：當 $0<\alpha<\pi/2$ 時，$\sin\alpha<\alpha$。則可證得當 $0<|\alpha|<\pi/2$ 時，$|\sin\alpha|<|\alpha|$。原不等式證明略敘如下：

設 O 表座標平面原點，A 表(1,0)，B 表(cosθ, sinθ)，因為

三角形 OAB 的面積 < 扇形 OAB 的面積，

因此有

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1\cdot\sin\theta) < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta \text{，}$$

故

$$\sin\theta < \theta \text{。}$$

Key: 寫 ε - δ 論證的方式與思維

(1) 先給 $\varepsilon > 0$ ———拿到一個正數當作要求的目標。
(2) 估計誤差———方法通常就那些。
(3) 找 δ———有時候要先限制再選取。
(4) 驗證找到的 δ 有效。

後記：最初撰寫這篇文章只是期望能替那些因為初學微積分卻被它的嚴謹困擾甚至挫折的徬徨學子提供可能的解套。在構思時，我盡可能地貼近一位初學者的思維行進，以求獲得極好的詮釋功效；在技巧上，我試著從各類型的描寫手法中尋找自認為最好理解、最簡易平近的言語。如果有人曾因為它而有些許的成效，對我而言會是最有力的鼓舞。