

微積分之 ε 總複習

1. 收斂與極限

- A) ε -N 定義 HWI.3(2)
- B) 運算性質 HWI.5
- C) 拉鏈定理 HWII.5
- D) 夾擠 HWIV.2 HWIII.(5?)
- E) 單調收斂定理 QzI.5
- F) BW 定理 HWII.4
- G) 歌西判別法 HWIII.3
- H) 子列的收斂性 HWI.4

Ex: $\frac{1}{n}, \frac{n}{2n^2+1}, \frac{Q(n)}{P(n)}, (1+\frac{1}{n})^n, \frac{n}{2^n}$

$\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{n!}$ 。

2. 上下極限：予 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ，bdd.

$$\begin{cases} \overline{\lim} a_n = \text{最大的聚點} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ \underline{\lim} a_n = \text{最小的聚點} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \\ \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n \text{ 且爲 } a \Leftrightarrow \lim a_n \text{ 存在且爲 } a. \end{cases}$$

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \\ \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n \end{cases}$$

HWIII.6, HWIII.7(1)

3. 級數的斂散

- A) P-級數 QzII.4
- B) 比較法 HWIII.9(2)
- C) Ratio
- D) Root
- E) N-term HWIV.5, HWIV.7(11)
- F) 歌西判別 HWIV.2
- G) 歌西壓縮定理 QzII.5(1)
- H) Abel 法
- I) Dirichlet 法 HWIV.7(12)
- J) Leibniz 法

4. 函數的極限

$$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} c \\ \infty \\ -\infty \end{cases}} f(x) = \begin{cases} L \\ \infty \\ -\infty \end{cases} \equiv$$

$$(x_n) \rightarrow \begin{cases} c \\ \infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \begin{cases} L \\ \infty \\ -\infty \end{cases}$$

幾個重要極限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{HWV.5} \quad \text{HWV.6(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{M \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{M})^M = e$$

$$+ \quad +$$

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{c}} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \tilde{c}} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \tilde{c}} g(x)$$

$$\div \quad \div$$

5. 連續：

- A) “單點” 連續 HWVI.1
- B) “區間” 連續
- C) 均勻（一致）連續 HWVI.8
- X) 中間值定理 HWVI.2, HWVI.6, HWVI.7
- Y) 極值定理

6. 微商

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- A) $(fg)' = f'g + fg'$
- B) $(f/g)' = (f'g - g'f)/g^2$
- C) $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
 - a) 單項式
 - b) 根式
 - c) 指對數
 - d) 三角函數
 - e) 反三角
 - f) 亂七八糟函數