

微積分的小小總複習

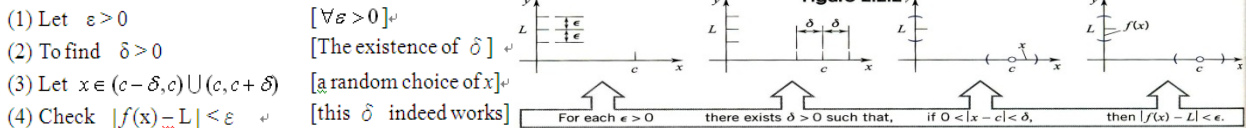


(*) 極限的定義

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta), |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{-----} (*)$$

如何證它：每當拿到一個 ε ，皆可找到一個 δ (by all means)，使得 ~~~~
 如何用它：任意丟出一個 ε ，皆可取回一個 δ (就是會有)，滿足 ~~~~

How to write down a proof for $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$??



經典範例：(a) $\lim_{x \rightarrow 3} 3x = 9$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$

Hint: 要證什麼? 怎麼證? 要證(*)的右半邊，依照那四個步驟證。

Proof of b: (1) Let $\varepsilon > 0$. (2) To solve $|x^3 - 8| < \varepsilon$, i.e. $|x - 2||x^2 + x + 8| < \varepsilon$. When (If, Restrict) $|x - 2| < 1$, (then) $1 < x < 3$, and $1 < x^2 < 9$. $\Rightarrow |x^2 + x + 8| \leq |x^2| + |x| + 8 < 20 \Rightarrow |x - 2||x^2 + x + 8| < 20|x - 2|$. If we want $20|x - 2| < \varepsilon$, then $|x - 2| < \varepsilon/20$. So we choose $\delta = \min(1, \varepsilon/20)$. (3) Let $x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$, (4) Then $|x - 3| < 1$ and $< \varepsilon/20$. $\Rightarrow |x^3 - 8| = |x - 2||x^2 + x + 8| < \delta \cdot 20 = \varepsilon/20 \cdot 20 = \varepsilon$. □

☆☆☆重要例子： $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$ $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ $\lim_{x \rightarrow c} |x| = |c|$

☆☆☆(*) 四則運算

若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, 則 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $M \neq 0$
 注意：若 $L \neq 0, M = 0$, $f(x)/g(x)$ 在 c 點極限不存在。
 若 $L = M = 0$, 則為不定型，得由他法辨識。

e.g. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 2}{2x + 1}$ (b) 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} y(x) = -2$, 求 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{3 + g(x)}{f(x) - y(x)}$

Hint: 看到什麼?? 答曰，運算。用什麼?? 對曰：還有什麼 = = =

Solution: (a) $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2 = 5$, and $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$, $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 2}{2x + 1} = 5/3$. (b) 手好癢.....

☆☆☆☆ e.g. 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 3$. 證： $\lim_{x \rightarrow c} 2f(x) - 3g(x) = 2L - 9$

Hint: 要證什麼? 有什麼???? 要證後面那 $\lim$, 有前兩個 $\lim$. (廢話!)

(*) 重要式子：(1) $|f(x) - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. [Pinching]

(2) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ (3) $||a| - |b|| \leq |a \pm b|$ [極限性質]

[分析] 若可用四則運算，輕而易舉；若限用 ε - δ 將難如登天，如下：

欲證： $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta), |(2f(x) - 3g(x)) - (2L - 9)| < \varepsilon$

現有： $\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (c - \delta_1, c) \cup (c, c + \delta_1), |f(x) - L| < \varepsilon_1 \quad (1) \\ \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (c - \delta_2, c) \cup (c, c + \delta_2), |g(x) - 3| < \varepsilon_2 \quad (2) \end{array} \right.$

黑框給我們一個啓示：有什麼，用什麼 $\rightarrow$ 想辦法法網底字「撈」成需要的東西。

目標： $|2f(x) - 3g(x) - (2L - 9)| = |2(f(x) - L) - 3(g(x) - 3)|$

Δ 不等式

$\leq 2|f(x) - L| + 3|g(x) - 3|$ (☆), 要它 $<\varepsilon \rightarrow$ 各負責小於 $\varepsilon/20$.

Proof: (1) Let $\varepsilon > 0$. (2) $\because \lim f(x) = L \therefore \exists \delta_1 > 0$ s.t. $\sim$, $\because \lim g(x) = 3 \therefore \exists \delta_2 > 0$ s.t. $\wedge _ \wedge$. Choose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. (3) Let $x \in _$. (4) “(☆)抄一遍” $< \varepsilon/20 + \varepsilon/20 \leq \varepsilon$. $\square$

☆☆☆☆☆(一個怪怪的問題) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$.

(*) 左右極限 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (c - \delta, c), |f(x) - L| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (c, c + \delta), |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$

(i) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$	(ii) $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = L$
(iii) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - L) = 0$	(iv) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) - L = 0$.

(2.2.6)

同樣地, 證什麼? 有什麼? 左半邊: $\forall \varepsilon' > 0 \dots \forall x \in (c - \delta', c) \cup (c, c + \delta') \dots < \varepsilon$; 右半邊: $\forall \varepsilon' \dots \forall x \in (c, c + \delta') \dots < \varepsilon'$, and $\forall \varepsilon' \dots \forall x \in (c - \delta', c) \dots < \varepsilon'$. Try to deal with those δ 's. A proof is on the whiteboard = =

☆☆☆ (*) 函數的連續性

函數 f 在 c 點連續 $\stackrel{Def}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(c) \text{ 有定義} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ 存在} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \end{cases}$

函數 f 在區間 I 連續 $\Leftrightarrow f$ 在 I 中每一點皆連續. (怎麼證每一點皆連續??)

把 $f(x)$ 在 c 點連續寫成 ε - δ 型式: For any $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that for any x in $(c - \delta, c + \delta)$, $|f(x) - L| < \varepsilon$

函數 f, g 在 c 點連續 $\rightarrow f \times g$ 在 c 點亦連續
(g 在 f 連續)

連續的例子: $P(x) = \sqrt{x}$, $P(x)/Q(x)_{Q(x) \neq 0}$, $\sin x$.

不連續函數:

☆☆ Pinching Thm: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in $(c - p, c + p)$ and

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \rightarrow \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$

兩重要極限:

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) / x = 0$

☆☆ 中間值定理: f 在 $[a, b]$ 連續, $f(a), f(b)$ 在 c 兩邊 $\rightarrow$ 有某 x_0 使 $f(x_0) = c$.

☆☆ 極值定理: f 在 $[a, b]$ 連續 $\rightarrow f$ 的值域有界 且 有 x_1, x_2 使 $f(x_1), f(x_2)$ 為極大最小值.

e.g. $\lim_{x \rightarrow c} x \sin(1/x) = ?$ [該對誰做什麼?]

e.g. 若 f 在 $[0, 1]$ 連續, 且 $0 \leq f(x) \leq 1$, 證明: $f(x) = x^k$ 在 $[0, 1]$ 中有解.

e.g. If for any x, y in (a, b) , $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, prove that f is cont. in (a, b) . [證連續, 證什麼?]

e.g. Prove: f cont. at c and $f(c) > 0 \rightarrow f(x) > 0$ in some $(c - \delta, c + \delta)$. [有什麼?]

e.g. Show: f is diff. at $c \rightarrow f$ is cont. at c . [證什麼? 有什麼?]

e.g. f cont. $\Leftrightarrow |f|$ cont. ?? $f + g$ and f noncont. $\rightarrow g$ noncont. ?? [手頭上有什麼??]

e.g. 有無在 $(0, 1)$ 上的連續函數 f 只有三個相異的取值?? 沒有有理數值者有無?? [誰在招手??]

e.g. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \rightarrow$ There are $\delta, B > 0$ such that $|f(x)| < B$ for all $0 < |x - c| < \delta$. [要做什麼??]

e.g. 證: 奇次實多項方程必有實根.

e.g. 若 f 為連續函數, 且 $-\sqrt{3}, 2/3 \in \text{Im} f$. 證明 $[-\sqrt{3}, 2/3] \subset \text{Im} f$. [包含怎麼證??]

e.g. When $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow c} [\sin(x+h) - \sin(x)]/h = ?$ [怕什麼? 動手啊!]

e.g. $\lim_{x \rightarrow c} x/(2^x + 2^{-x}) = ?$ [擾亂的是誰??]

e.g. 證明極限四則運算的乘法律. [其實它不難!!]

~版權沒有。亂印照究~