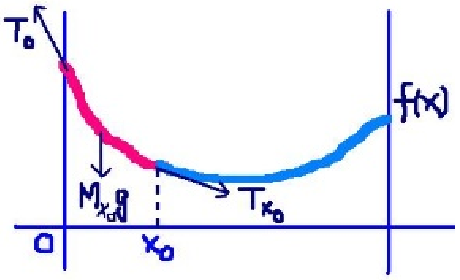
懸鏈線

(1) 將一條鏈子的兩端分別掛在座標平面的點 $(0,u)$, (α,v)處，藉由重力的自然作用，我們得到鏈子「懸著」的模樣，此爲懸鏈線。設其質量爲 M，長度爲 L，方程爲 $y = f(x)$，我們將要研究它。



(2) 如上圖，任予 $x_0 \in (0,\alpha)$，我們可分析在點 $(x_0, f(x_0))$的受力情形。我們視粉紅色的區段爲整體，不難看出它受到兩股張力 T_0 及 T_{x_0}，和重力 $M_{x_0}g$ 的作用。藉由水平與垂直分力的平衡，我們有：

$$\begin{cases} T_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+(f'(0))^2}} = T_{x_0} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+(f'(x_0))^2}} & \text{-------- (1)} \\ T_0 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(f'(0))^2}}} = T_{x_0} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(f'(x_0))^2}}} + M_{x_0}g & \text{-------- (2)} \end{cases}$$

(3) 將(2)式整理，得到

$$T_0 \cdot \frac{-f'(0)}{\sqrt{(f'(0))^2+1}} = T_{x_0} \cdot \frac{-f'(x_0)}{\sqrt{(f'(x_0))^2+1}} + M_{x_0}g \quad \text{-------- (3)}$$

將(1)代換進(3)，有

$$T_0 \cdot \frac{-f'(0)}{\sqrt{(f'(0))^2+1}} = T_0 \cdot \frac{-f'(x_0)}{\sqrt{(f'(0))^2+1}} + M_{x_0}g$$

$$\frac{T_0}{\sqrt{(f'(0))^2+1}} \cdot (f'(x_0) - f'(0)) = M_{x_0}g$$

(4) 假定這條鏈子的質量是均勻分佈的，因此粉紅色部分的質量 M_{x_0} 與鏈子整體質量的比爲

$\int_0^{x_0} \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ ： $\int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ = $\int_0^{x_0} \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ ：L。因此我們發現：

$$\frac{T_0}{\sqrt{(f'(0))^2+1}} \cdot (f'(x_0) - f'(0)) = M \frac{\int_0^{x_0} \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt}{L} g \text{ 。}$$

(5) 由於 x_0是任予的，因此事實上，對任何 $x \in (0,\alpha)$，皆有

$$\frac{T_0}{\sqrt{\left(f'(0)\right)^2+1}}\cdot\left(f'(x)-f'(0)\right)=M\frac{\int_0^x\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt}{L}g\ 。$$

兩邊微分，得

$$\frac{T_0}{\sqrt{\left(f'(0)\right)^2+1}}\cdot f''(x)=\frac{Mg}{L}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$$

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}=\frac{Mg\sqrt{\left(f'(0)\right)^2+1}}{L\cdot T_0}$$

因此

$$\sinh^{-1}f'(x)=\frac{Mg\sqrt{1+\left(f'(0)\right)^2}}{L\cdot T_0}x+C$$

$$f'(x)=\sinh\left(\frac{Mg\sqrt{1+\left(f'(0)\right)^2}}{L\cdot T_0}x+C\right)$$

$$f(x)=\frac{L\cdot T_0}{Mg\sqrt{1+\left(f'(0)\right)^2}}\cosh\left(\frac{Mg\sqrt{1+\left(f'(0)\right)^2}}{L\cdot T_0}x+C\right)+D$$

$$=\frac{T_{0,x}}{\mu g}\cosh\left(\frac{\mu g}{T_{0,x}}x+C\right)+D$$

其中μ表線密度，$T_{0,x}$表左端張力的水平分量值。

(6) 可將 D 平移成-1（垂直移動），並改變座標（水平移動），使 C=0。令$a=\frac{T_{0,x}}{\mu g}$，則可得懸鏈線的標準式：$y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)-1$

Q：能否以給定的 M, L, μ，以及α, u, v 求出此曲線方程式？

(7) 考慮 $y=f(x)=a\cosh\left(\frac{x}{a}+C\right)+D$ 則有

(i) 兩端高度差 $v-u$ (考慮方向)爲

$$v-u=a\cosh\left(\frac{\alpha}{a}+C\right)-a\cosh C\ 。$$

(ii) $f'(x)=\sinh\left(\frac{x}{a}+C\right)$，因此從 0 至 x 的區段長爲

$$L(x)=a\sinh\left(\frac{x}{a}+C\right)-a\sinh C$$

$$L = L(\alpha) = a\sinh(\frac{\alpha}{a}+C) - a\sinh C$$

(8) 由上述的兩項結果，我們發現

$$\begin{cases} \dfrac{v-u}{\alpha} = \dfrac{a}{\alpha}\cosh(\dfrac{\alpha}{a}+C) - \dfrac{a}{\alpha}\cosh C \\ \dfrac{L}{\alpha} = \dfrac{a}{\alpha}\sinh(\dfrac{\alpha}{a}+C) - \dfrac{a}{\alpha}\sinh C \end{cases}$$

因此

$$(\frac{v-u}{\alpha})^2 - (\frac{L}{\alpha})^2 = 2\frac{a^2}{\alpha^2} - 2\frac{a^2}{\alpha^2}\cosh(\frac{\alpha}{a}) = -4\frac{a^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\cosh(\frac{\alpha}{a})-1}{2} = -(\frac{2a}{\alpha}\sinh\frac{\alpha}{2a})^2$$

即

$$\frac{2a}{\alpha}\sinh\frac{\alpha}{2a} = \sqrt{(\frac{L}{\alpha})^2 - (\frac{v-u}{\alpha})^2}$$

(9) 前式右式皆為已知量，因而只需在左式中求出 a 即可。但由於它非一般方程式，我們無法具體求解，但可確定解的存在性與唯一性。

(i) 不難確認（為什麼），右式根號內部必≧0，且右式本身必須≧1，但我們希望它 >1，否則是個很無聊的狀況。

(ii) 考慮 $g(x) := \dfrac{\sinh x}{x}$，可得

$$g'(x) = \frac{x\cosh x - \sinh x}{x^2}$$

令分子 $= h(x)$，由

$h'(x) = \cosh x + x\sinh x - \cosh x = x\sinh x > 0$ 對 $x \in (0,\infty)$

$h(0) = 0$

可知

$h(x) > 0$ 對 $x \in (0,\infty)$

因此 $g(x)$為嚴格遞增函數。又由洛必達法則

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{1} = 1，$$

因此，前式必定有唯一解。

(10) 把最棘手的 a 值找出來，接著 C 與 D 的求取則不困難（如何求？）。 問題: cosh(x)有無積和差互化公式？