從$\{\frac{1}{n}\}_n$到 ε-N定義

開心的老企鵝

Febrary 19, 2013

以下是假想一段對話錄. 我想藉由它表達從直觀的想法進展到嚴格定義的思想進程. 假定ATK是已熟嚴格定義的一方, 而DEF一方對極限則是有直觀敏銳而細膩的觀察, 而且雙方皆擅長概念分析. 我將編出一段兩者之間的連結.

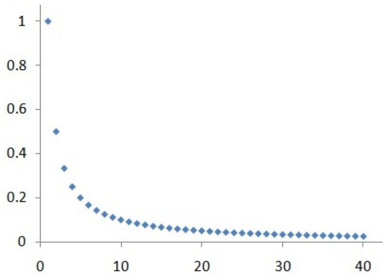
ATK: 當$n \to \infty$時, $\frac{1}{n}$趨近0, 對吧?

DEF: 是.

ATK: 何以見得?

DEF: 當$n \nearrow$時, $\frac{1}{n}$確直一直往0挺進.

ATK: 那我們來看看圖形.



如何說明它不能是$\frac{1}{100000}$?

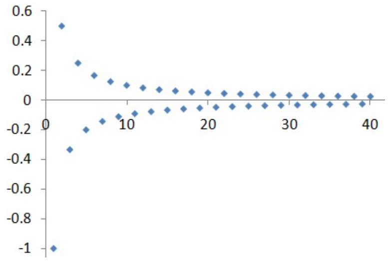
DEF: 圖形延伸下去, 從第100001項開始數列就比 $\frac{1}{10000}$小了, 而且越來越小. 也就是在100000項之前數列靠向$\frac{1}{100000}$. 但這又如何? 往後就逐漸遠離了.

ATK: 所以這意味著它只可以趨向0?

DEF: 是的.

ATK: 那麼當$n \to \infty$時, $\frac{(-1)^n}{n}$的趨向為何?

DEF: 那還是0.



雖然它在0的兩邊跳盪, 但是它逐漸向著0貼合.

ATK: 但它沒有向前例的不停地走向0. 我是說, 如果要說明它不趨向$\frac{1}{100000}$, 它並不會在某一項之後不斷遠離. 因為它是震盪的. 這該作何解釋?

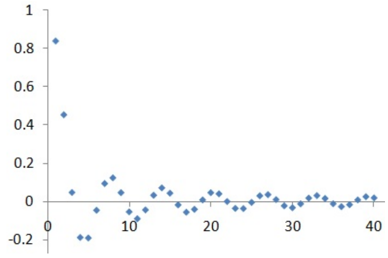
DEF: 但是它和0差距越來越小, 而且小到0.

ATK: 也就是說關鍵是差距的趨勢?

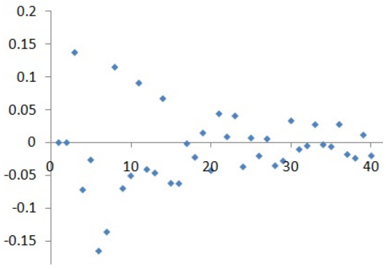
DEF: 趨近講究的是差距的走向, 數列本身是否遞增或遞降並不是最重要的.

ATK: 好. 那我換一個差距會震盪的數列, 例如我取 $\{\frac{1}{n}\sin n\}_n$.

DEF: 如果你仔細觀察它, 有這個因子$|\sin n| \leq 1$, 因此它不受影響. 我的意思是它和0的差距是一級一級地減小.



當然, 從這張圖可以很明確看出它有跑向0的趨勢. 如果真的要仔細觀察一級一級收斂的現象, 我們可以看個稍微亂一點的數列, 例如 $\{\frac{\sin n^2}{n}\}_n$.



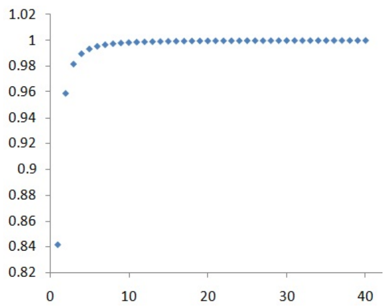
從圖形我們看不出趨勢. 但是藉由$|\sin n^2| \leq 1$的估計, 可知道它的層級如何畫分. 這麼一來, 就很容易接受它收斂到0這件事了.

ATK: 那現在我可否從這個問題用兩種不同方式修改?

DEF: 請說.

ATK: 把它的分子分母對調, 也就是指這個數列 $\{n \sin \frac{1}{n}\}_n$.

DEF: 經過一些計算, 我們可以從圖表上看出它趨向1.



ATK: 如果解釋這個結果?

DEF: 我是指, 當$n \nearrow$時, 它會增長, 然後最終靠向1?

ATK: 當然, 我也許接受它的極限是1. 所以我們都認為 $\{n \sin \frac{1}{n}\}_n \to 1$.

DEF: 是.

ATK: 這只是我們這麼認為. 但是要如何讓大家都這麼認為? 我的疑慮是, 如何排除它是否會是其他數的疑慮?

DEF: 它乍看確實也有可能是0.999997. 於是我們需要一些估計.

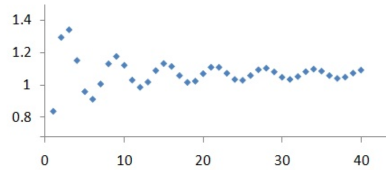
ATK: 也許我們應該想, 究竟是哪一種特質讓我們認為數列有這樣的趨向?

DEF: 是, 我瞭你想探討的.

ATK: 還有另外一個方向 - 如果把$\frac{1}{n}\sin n$加起來, 從$n = 1, 2, 3, \cdots$無止盡地往上加. 它最終的趨近值是何數?

DEF: 這可不好算啊!

ATK: 它的圖形長這樣子, 而它的趨近值卡在中間.



如果有一天我一覺醒來很神奇地說它的極限是$\frac{\pi-1}{2}$, 我要如何說服你你才願意接受這樣的結果?

DEF: 照這麼說, 倘若它的極限$L > M = \frac{\pi-1}{2}$. 依照我們之前看到的現在, 勢必有一條子數列$\{a_{n_j}\}_j$滿足

$$|a_{n_j} - L| \searrow 0.$$

ATK: 我們可以這麼找到. 但極限L不該發生, 也就是指對任何子數列 $\{a_{n_j}\}_j$,

$$|a_{n_j} - L| \not\searrow 0. \qquad (1)$$

DEF: 那這麼說, 我們等同於要先處理一個數列$\{b_n\}_n \searrow 0$的意思了. 也就是如何描述這個數列會越來越小而且小到0. 雖然這不是很難, 但是回過頭來處理(1)式的時候應該會很複雜.

ATK: 不妨我們回過頭來思索 $\{\frac{(-1)^n}{n}\} \not\to \frac{1}{100000}$ 更明確的理由.

DEF: 因為當$n > 200000$時, $|a_n - \frac{1}{100000}| > \frac{1}{300000}$.

ATK: 但是 $\{(-1)^n\}_n$ 卻失敗了. 因為它不僅發散, 更確切的話我想說它不趨近-1, 而且它不滿足我們想給定的條件, 因為它是+1, -1相間, 每兩個項會有一個項與-1的距離是0. 也就是說這個數列無法在某一項之後和-1的距離全部小於某一個夠小的數.

DEF: 那麼改成存在一個子列它的每一項與-1的距離皆大於某個夠小的數.

ATK: 這看起來就合理多了. 所以我們想說$\{a_n\}_n \not\to L$ 意味著存在$\{n_j\}_j$滿足$|a_{n_j} - L| > \varepsilon_0$.

DEF: 把它寫精確, 就成了

$$\exists \varepsilon_0 \exists \{n_j\}_j \forall j \ \ |a_{n_j} - L| > \varepsilon_0. \tag{2}$$

ATK: 如果以這個當作不收斂到L的定義, 那麼$\{a_n\}_n \to L$就意味著

對任意的$\varepsilon > 0$, 任意的$\{n_j\}_j$, 皆存在某個j, 滿足 $|a_{n_j} - L| \leq \varepsilon$. (3)

DEF: 現在的問題是, 我們是否該進一步檢測這個定義的合理性. 也就是只(2)式能否勝任不收斂到L的條件.

ATK: 我們知道, 如果條件滿足的話, 我們很有理由認為 $\{a_n\}_n \not\to L$, 因為不管這條數列怎麼走, 總是會不定時出現一些項和L有特定的距離.

DEF: 是.

ATK: 然而, 反過來說, 如果一個數列不趨近L, 如果我們用既往的圖形想, 確實都俱備我們給出的條件. 但是會不會有某些圖形複雜到我們無法想像, 而且它既發散又不滿足我們給定的條件呢?

DEF: 就讓我們在(2)的想法上著手. 若$\{a_n\}_n \not\to L$, 而且那個找到的ε_0就當作是$\frac{1}{2}$吧. 我們試著硬是讓這個ε_0破功. 我說的破功是指在這個ε_0底下, 無法找到子列$\{n_j\}_j$滿足我們的要求.

ATK: 這樣說, 倘若我們真的找到一個嚴格遞增數列$\{k_j\}_j$, 對每個j都滿足 $|a_{k_j} - L| > \varepsilon_0$. 那麼這條數列就不可以永無止盡地走下去. 也就是這必定是條有限數列.

DEF: 是的. 如果我們把所有與L的差距大過ε_0的項串成一條子列, 那麼這條子列一定是有限的.

ATK: 是.

DEF: 也就是在這些有限個項之後, 往後的每個項與L的距離皆小於ε_0.

ATK: 是.

DEF: 這就意味著並不會有這麼一條子列$\{a_{n_j}\}_j$滿足其中每一項與L的距離皆小於ε. 所以ε_0得更小.

ATK: 也就是原先的$\frac{1}{2}$找錯了.

DEF: 如果我們讓情況更糟, 也就是修改成更小的新的ε_0也破功. 試想像一像, 我先前提到的$\frac{1}{n}\sin n$是一級一級地靠向0.

ATK: 也就是說如果不論如合修正ε_0都破功, 代表數列會像你說的那樣一級一級地靠向L. 那它豈不是收斂的樣子嗎?

DEF: 這正是我的意思. 如果有一個數列它不收斂到L, 卻也不滿足我們給出的條件, 那麼它勢必得如同上述, 產生收斂(到L)的樣子, 因此互相抵觸.

ATK: 所以我們的結論是,

$$\exists \varepsilon_0 \exists \{n_j\}_j \forall j \ \ |a_{n_j} - L| > \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \{a_n\}_n \not\to L.$$

這個概念和描述的連結其實相當可靠了.

DEF: 不. 更精確地說, 是

$$\exists \varepsilon_0 \exists \{n_j\}_j \forall j \ \ |a_{n_j} - L| > \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \text{我們覺得}\{a_n\}_n \not\to L. \tag{4}$$

ATK: 你的意思是, 我們剛剛在論證的是(4)這個敘述?

DEF: 是. ($\Rightarrow$)是明顯的; 然而, 在($\Leftarrow$)的一部份確實有失嚴密性.

ATK: 何說?

DEF: 我想說的是: 必定是條有限數列的這個部份.

ATK: 是. 以型式化邏輯的的觀點, 它確實不那麼嚴密.

DEF: 讓我們把式子寫更清楚吧. (2)的意思是: 存在一個正數ε_0, 以及一條遞增數列, 滿足:

a. 它是無窮數列.

b. 它的每一項與L的距離都$> \varepsilon$.

ATK: 是.

DEF: 它的否定敘述則是, 對任意的正數ε, 以及任意的遞增數列, 它若非不是個無窮數列, 就不滿足每一項與L距離皆$> \varepsilon_0$.

ATK: 下一步即是, 對任意的正數ε, 以及任意的遞增數列, 倘若它每一項與L距離皆$> \varepsilon_0$, 那麼它必定不是個無窮數列, 即, 它是有限數列.

DEF: 因此才會產生後續的推論.

ATK: 所以這是個反證法的思路.

DEF: 在這段推論中我們其實察覺到一件事.

$$\begin{aligned}&\text{一個數列}\{a_n\}_n\text{ 收斂到}L\text{意味著}\\&\text{對任意的}\varepsilon > 0\text{,只有有限個項,}\\&\text{即}\{a_{n_j}\}_{j=1}^{N_\varepsilon}\text{使得 }|a_{n_j} - L| > \varepsilon.\end{aligned} \tag{5}$$

ATK: 到目前為止我們產生了一些收斂到L與不收斂到L的條件. 當然, 它們是可以互相推論的. 然而如(4)所說, 我們給的條件只能說明我們覺得數列不收斂到L. 然而真正的收斂又是什麼?

DEF: 概念是我們在討論的, 當然, 我們可以直截了當地定義

$$\{a_n\} \to L\text{若且唯若我們覺得}\{a_n\} \to L. \tag{6}$$

ATK: 於是其實我們是在對我們覺得的事情給出等價條件. 這大概真的很像在描述一個概念, 而且是很精準地描述它.

DEF: 是.

ATK: 那麼倒頭來, 你是知道極限的意思的, 只是沒有明確地辨析出來.

DEF: 我們兩人在著重的點或許大相逕庭, 其實這是一樣的. 我重視從各種實例分析出共同的特質, 藉此熟知複雜的概念; 而你強調把它描述出來, 用嚴謹的數學語言. 如果大家都只用概念談論, 而概念大多只可意會難以言談, 很可能出現難以溝通的局面; 相反地, 如果太過強調表達好的句子和定義, 卻又不好體會這些其實很直白的內涵. 因此兩方面各有優點和缺失, 不要顧此失彼才是最重要的.

練習題.
證明(3)和(5)和我們慣用的收斂定義等價.

後記:

我總算完成了這段對話. 也許我可以說, 我證明了極限的定義必須是如此. 但是數學家會反駁: 定義只是規定, 何謂證明一個定義是對的? 然而, 我使用的不是數學的思路, 再者, 證明兩個字的本意是什麼? 如果它被介定為強度很強的說服過程, 那麼我滿足了要求. 換句話說, 數學上的證明只是證明的一種型式, 也可以說是在目前思想上要求最強的一種說服方式.

整段對話過程有諸多假設, 在此不一一詳列. 然而, 如果我們接受這些假設, 那麼這篇文的結論是有道理的. 相對地, 如果我們否認這些假設, 那麼會將進入另一種思考的世界. 至於如何提出好的思維, 又是一段爭論與攻防戰.

總結地說, 我以這篇文替孩提時代的微積分與大學時代的微積分建立了一座橋樑. 也希望這樣的橋樑可以讓未來在初入微積分卻為其而苦的後人快速通過這條鴻溝.