

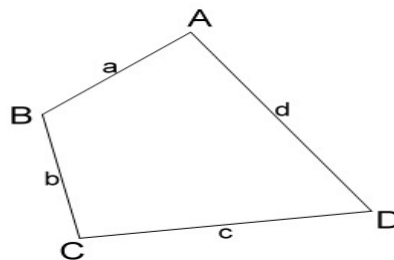
Bretschneider 公式

【已知】 a 、 b 、 c 、 d 邊長及角 B 、 D

【求證】四邊形面積

$$\Delta = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2\left(\frac{B+D}{2}\right)}$$

其中 s 為周長之半



【證明】

(一) 由餘弦定理：

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$$

$$a^2 + b^2 - 2ab(1 - 1 + \cos B) = c^2 + d^2 - 2cd(1 - 1 + \cos D)$$

可得：

$$a^2 + b^2 + 2ab - 2ab(1 + \cos B) = c^2 + d^2 - 2cd + 2cd(1 - \cos D)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + 2ab(1 - \cos B) = c^2 + d^2 + 2cd - 2cd(1 + \cos D)$$

將其化簡後為：

$$(a+b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{B}{2} = (c-d)^2 + 4cd \sin^2 \frac{D}{2}$$

$$(a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{B}{2} = (c+d)^2 - 4cd \cos^2 \frac{D}{2}$$

括號合併：

$$\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right) = (s-d)(s-c) = ab \cos^2 \frac{B}{2} + cd \sin^2 \frac{D}{2}$$

$$\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right) = (s-b)(s-a) = ab \sin^2 \frac{B}{2} + cd \cos^2 \frac{D}{2}$$

(二) 將兩式相乘：

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = \left(ab \cos^2 \frac{B}{2} + cd \sin^2 \frac{D}{2}\right)\left(ab \sin^2 \frac{B}{2} + cd \cos^2 \frac{D}{2}\right)$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + c^2 d^2 \sin^2 \frac{D}{2} \cos^2 \frac{D}{2} + abcd \left(\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{D}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{D}{2}\right)$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + c^2 d^2 \sin^2 \frac{D}{2} \cos^2 \frac{D}{2} + abcd \left[\left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{D}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{D}{2}\right)^2 + 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{D}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{D}{2} \right]$$

$$= a^2 b^2 \sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + c^2 d^2 \sin^2 \frac{D}{2} \cos^2 \frac{D}{2} + abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right) + 2abcd \cos \frac{B}{2} \cos \frac{D}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{D}{2}$$

$$= \left(ab \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + cd \sin \frac{D}{2} \cos \frac{D}{2}\right)^2 + abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D\right)^2 + abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right)$$

$$= \Delta^2 + abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right)$$

$$\text{故 } \Delta = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2}\right)}$$

證畢