

96 年學科能力測驗詳解

第一部分：選擇題

壹、單選題

1. (4)

[範圍]第一冊多項式

[詳解]

$$f(5) - f(-5) = [a \cdot (5)^6 - b \cdot (5)^4 + 3 \cdot 5 - \sqrt{2}] - [a \cdot (-5)^6 - b \cdot (-5)^4 + 3 \cdot (-5) - \sqrt{2}] = 30 \dots (4)$$

2. (2)

[範圍]第一冊數與座標系

[詳解]

$$\overline{AB}: \frac{x}{-n} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x - ny = -2n \text{ 又過 } P(7, k) \therefore 2(7) - nk = -2n \Rightarrow n(k-2) = 14 \text{ 又 } n, k \in \square$$

所以 $(n, k-2) = (1, 14) \vee (2, 7) \vee (7, 2) \vee (14, 1)$ 即共有四組解.....(2)

3. (4)

[範圍]第一冊多項式

[詳解]

最大溫差就是溫度的最大值減去溫度的最小值

$$f(t) = -t^2 + 10t + 11 = -(t-5)^2 + 36, 1 \leq t \leq 10$$

所以 $\max = f(5) = 36, \min = f(10) = 11$ 即最大溫差 25.....(4)

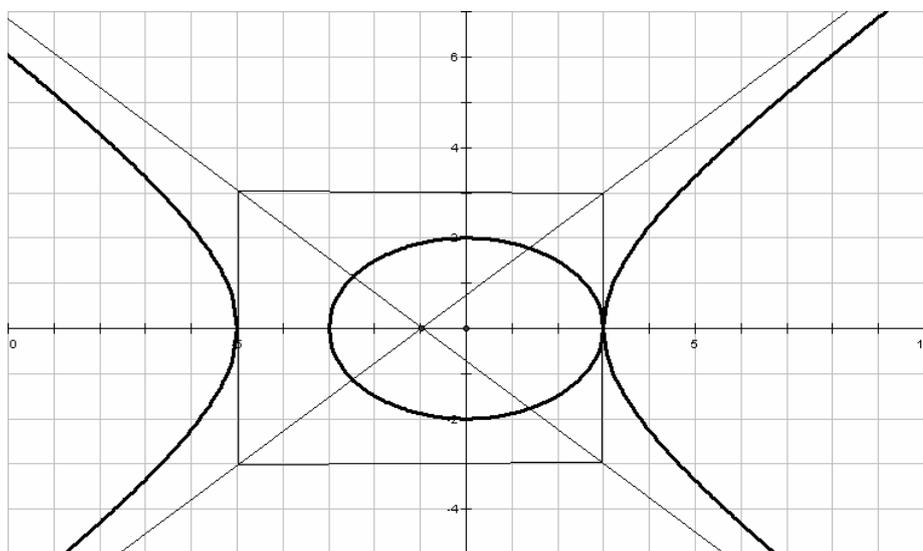
4. (1)

[範圍]第四冊圓錐曲線

[詳解]

$$\Gamma_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \Gamma_2: \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 所以 } \Gamma_1 \text{ 中 } a_1 = 3, b_1 = 4 \Rightarrow c_1 = \sqrt{5}, \Gamma_2 \text{ 中 } a_1 = 4, b_1 = 3 \Rightarrow c_1 = 5$$

所以根據圖形只有一個交點.....(1)



96 年學科能力測驗詳解

5. (3)

[範圍]第二冊三角函數

[詳解]

因為 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 又 $y = \frac{x}{10\pi}$ 所以只要關心 $-10\pi \leq x \leq 10\pi$ 的圖形

又知道每一個週期(2π)就會有兩個交點所以正向有 5 個週期即 10 個交點，同理負向也 10 個交點但是(0,0)重複計算了，所以圖形共有 $10+10-1=19$ (個)交點.....(3)

貳、多選題

6. (1)(3)(5)

[範圍]第一冊數與座標系(第三冊三角函數)

[詳解]

(法一)

所以 Γ 在複數平面上是以(1,0)為圓心 1 為半徑的圓， $w = iz = z(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

所以從圖形上面考慮即為 z 圖形對於原點 O 逆時針旋轉 90° ，所以 Ω 圖形是以(0,1)為圓心 1 為半徑的圓，即 $|w-i|=1$ 所以(1)(3)(5)正確

(法二)

$$w = iz \Rightarrow z = \frac{w}{i} \text{ 又 } |z-1|=1 \Rightarrow \left| \frac{w}{i} - 1 \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{w-i}{i} \right| = 1 \Rightarrow \frac{|w-i|}{|i|} = 1 \Rightarrow \frac{|w-i|}{1} = 1 \Rightarrow |w-i|=1$$

也可以得到相同的結論

7. (1)(2)(4)(5)

[範圍]第三冊平面向量

[詳解]

O(1)因為 $L:3x-4y=0$ 所以(3,-4)是平面的法向量，即 $\overline{PQ} \parallel (3,-4)$

$$O(2) \overline{PQ} = 2d(P,L) = 2 \frac{|3s-4t|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|6s-8t|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

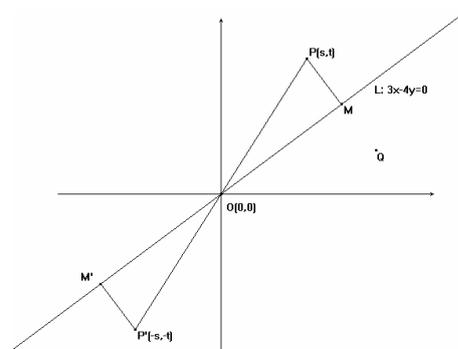
X(3)(s,t) \rightarrow (t,s) 對稱軸是 $x=y$

O(4)在 L 上取 M, M' 使得 $\overline{PM}, \overline{P'M'} \perp L$ 因為 $P(s,t)$ 和 $P'(-s,-t)$ 對稱於原點所以 $\overline{OP} = \overline{OP'}$ 且

$$\angle POM = \angle P'OM', \angle OMP = \angle OM'P' \text{ 所以 } \square OMP \cong \square OM'P' (SAA) \text{ 即 } \overline{PM} = \overline{P'M'} \text{ 又 } \overline{PM} = \overline{QM}$$

所以 Q, P' 到 L 的距離是一樣的而且 Q, P' 在 L 同一側，所以 $\overline{P'Q} \parallel L$ ，所以過 Q 作平行 L 的直線會過 $P'(-s,-t)$

O(5)因為 $O(0,0)$ 是 L 上的一個點，所以 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 所以 $(\overline{OP} + \overline{OQ}) \parallel L \Rightarrow (\overline{OP} + \overline{OQ}) \perp \overline{PQ}$



96 年學科能力測驗詳解

8. (1)(5)

[範圍] 第三冊矩陣和行列式

[詳解]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=7 \\ y+z=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

所以代入每個增廣矩陣所對應的方程式得有(1)(2)(3)(5)

但是(2)(3) $\Delta=0$ 與原方程組恰一組解不合，所以只有(1)(5)正確

9. (1)(2)(4)

[範圍] 第三冊圓與球

[詳解]

O(1) 因為 A,B,C 三球都和 xy 平面相切所以到平面的距離都是半徑，所以兩面平行

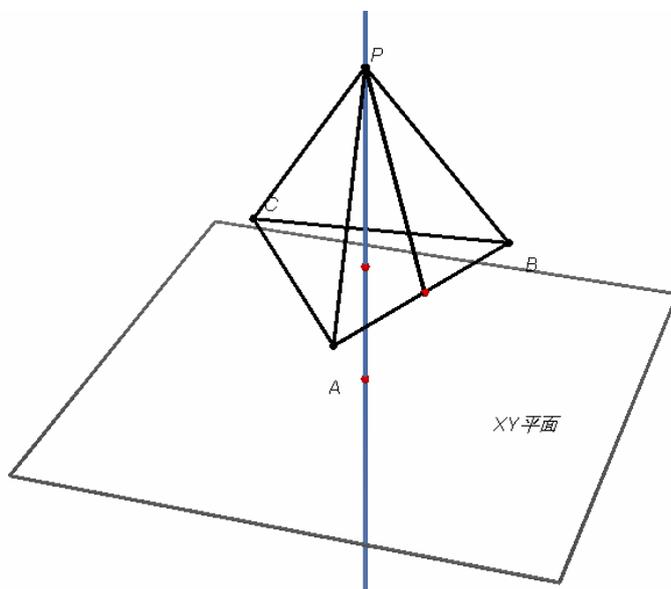
O(2) 因為 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} =$ 兩倍的半徑=2，所以是正三角形

X(3) PAB 上的一個邊一樣為兩倍的半徑=2

O(4) 點 P 到直線 AB 的距離為正三角形的高，

$$\therefore d(P, \overline{AB}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

X(5) $d(P, E_{xy}) = d(P, E_{ABC}) + 1 \neq \sqrt{3} + 1$



10. (1)(2)(4)(5)

[範圍] 第二冊指數與對數

[詳解]

O(1) $f(3) = 6 \Rightarrow 6 = a^3 \Rightarrow \log_a 6 = 3 \therefore g(36) = \log_a 36 = \log_a 6^2 = 2 \log_a 6 = 6$

$$O(2) \frac{f(238)}{f(219)} = \frac{a^{238}}{a^{219}} = a^{19} = \frac{a^{38}}{a^{19}} = \frac{f(38)}{f(19)}$$

X(3) $g(x) - g(y) = \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} = g\left(\frac{x}{y}\right)$ 所以要再等比例才會相等，故此題錯誤

$$O(4) \text{ 令 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \therefore y_1 = \log_a x_1, y_2 = \log_a x_2 \therefore m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\log_a x_1 - \log_a x_2}{x_1 - x_2}$$

但是 $y = \log_a x$ 為嚴格遞增函數，所以 $(\log_a x_1 - \log_a x_2)(x_1 - x_2) > 0$ 即 $m = \frac{\log_a x_1 - \log_a x_2}{x_1 - x_2} > 0$

O(5) $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 對稱 $x=y$ 且 $y = 5x$ 和 $y = \frac{1}{5}x$ 對稱 $x=y$ 所以圖形相交的情形相同

96 年學科能力測驗詳解

11. (2)(4)

[範圍]第一冊多項式

[詳解]

令 $h(x) = f(x) - x$ 所以 $h(x)$ 的最高次項係數還是 1，又 $h(1) = 0, h(2) = 0, h(5) = 0$ 所以 $h(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$ 且 $h(x) = f(x) - x$ ，所以 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5) + x$

所以代入得 $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) > 0, f(3) < 0, f(4) < 0, f(5) > 0$ ，由堪根定理得

在 $(0,1); (2,3); (4,5)$ 之間均有根又三次式最多只有 3 個實根，所以其他區間內不會有根故(2)(4)正確

第二部分：選填題

A. ⑫1 ⑬4

[範圍]第二冊指數與對數

[詳解]

$$\log_x 4 - \log_2 x = 1 \Rightarrow 2 \log_x 2 - \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{2}{\log_2 x} - \log_2 x = 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0 \therefore \log_2 x = 1 \vee -2$$

但是 $0 < x < 1 \therefore \log_2 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

B. ⑭- ⑮2 ⑯1 ⑰2

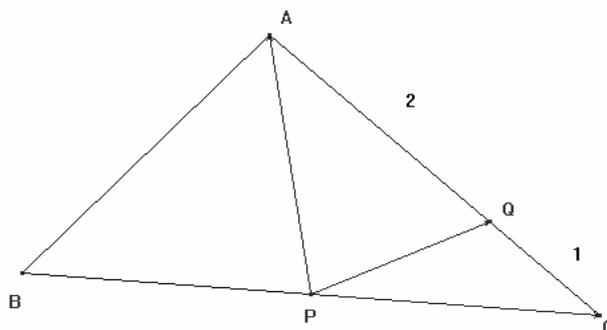
[範圍]第三冊平面向量

[詳解]

因為 $AQ : QC = 2 : 1$ 所以 $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$

$$(1,5) = \frac{1}{3}(4,3) + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} \Rightarrow 2\overrightarrow{PC} = (-1,12)$$

又 P 為 BC 中點所以 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PC} = (-1,12)$



C. ⑱7 ⑲9

[範圍]第四冊機率與統計

[詳解]

所以之後的平均 $\overline{X'} = \frac{15 \cdot 76 - 92 - 45 - 55}{15 - 3} = 79$

96 年學科能力測驗詳解

D. ⑳1 ㉑6 ㉒0 ㉓0

[範圍]第一冊數列與級數

[詳解]

$$a_{13} = 64 = a_1 + 12d \quad S_{25} = \frac{(2a_1 + 24d)25}{2} = (a_1 + 12d)25 = 64 \cdot 25 = 1600$$

E. ㉔1 ㉕2 ㉖1 ㉗3 ㉘- ㉙5 ㉚1 ㉛3

[範圍]第二冊三角函數

[詳解]

若 A 點表示成 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 則

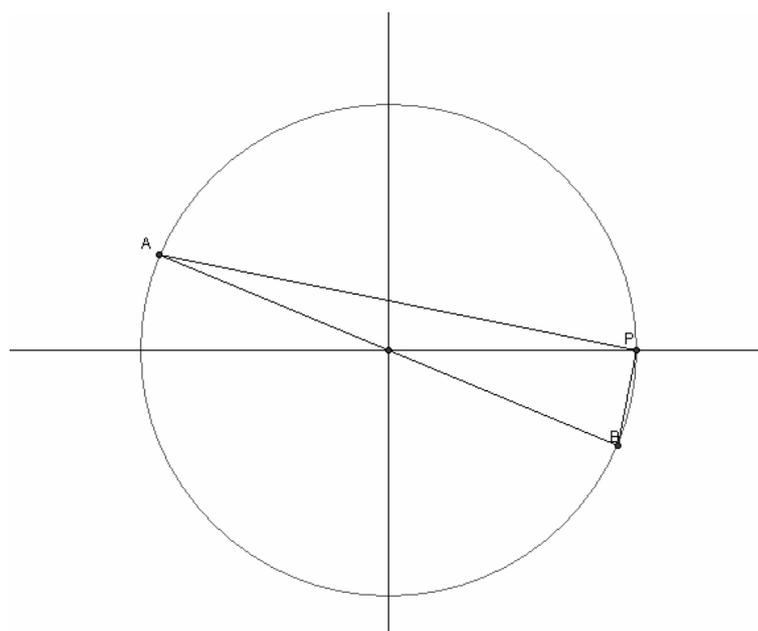
B $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$

又 A $(\frac{-12}{13}, \frac{5}{13})$ 所以 $\cos \theta = \frac{-12}{13}, \sin \theta = \frac{5}{13}$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta = -(-\frac{12}{13}) = \frac{12}{13}$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta = -(\frac{5}{13}) = -\frac{5}{13}$$

所以 B $(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$



F. ㉜2 ㉝5

[範圍]第四冊排列組合

[詳解]

任意搭配總共有 $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ (種)

但是紅帽不配灰鞋，少了 $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ (種)紅帽配灰鞋

白衣必配藍帽，少了 $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ (種)白衣不配藍帽

但兩者有交集，紅帽配灰鞋和

白衣不配藍帽交集為紅帽白衣綠鞋(1 種)

所以共有 $36 - 3 - 9 + 1 = 25$ 種

G. ㉞8 ㉟7 ㊱1 ㊲4

[範圍]第四冊排列組合

[詳解]

今天如果是由主持人抽出一球，且 A,B 兩人分別採用甲乙兩方案，則每次抽出一球 A,B 兩人拿到

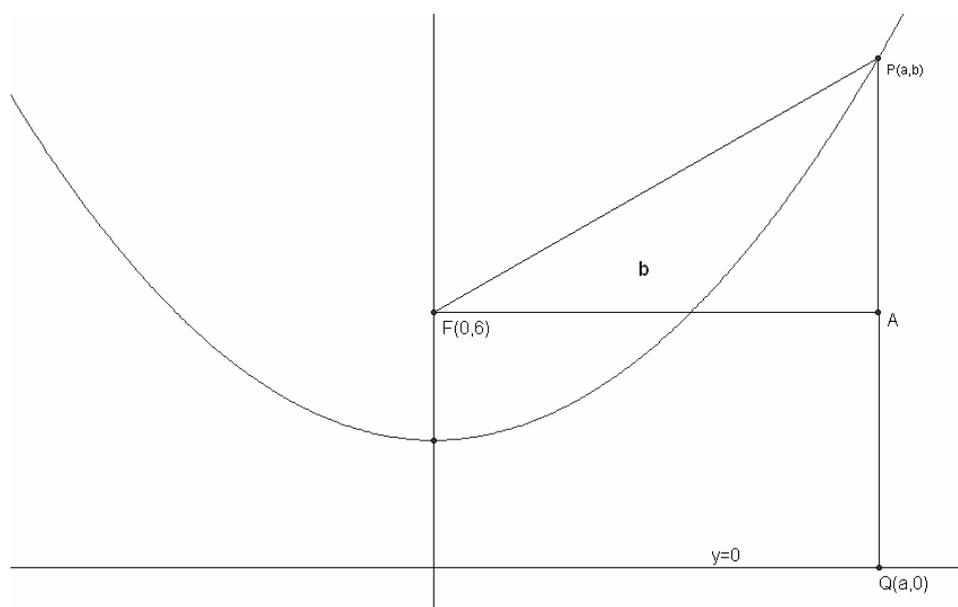
錢的總合一定為 11 元，換句話說甲乙兩方案的期望值總合為 11. $\therefore E_{\text{甲}} = 11 - \frac{67}{14} = \frac{87}{14}$

96 年學科能力測驗詳解

H. ㉘1 ㉙2

[範圍] 第四冊圓錐曲線

[詳解]



所以此拋物線為以(0,3)當作頂點， $y=0$ 當作準線的圖形，且在 PQ 上去一點 A 使 FA 垂直 PQ
 所以 P 到準線的距離等於 P 到 $y=0$ 的距離 = b 所以 PF 線段長也是 b (根據拋物線的定義)

$$\because \angle FPQ = 60^\circ \therefore \overline{PA} = \overline{PF} \cdot \cos 60^\circ = \frac{b}{2} \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{PQ} - \overline{PA} = \frac{b}{2} \text{ 但是 } F(0,6) \text{ 所以 } \overline{AQ} = 6 \text{ 即 } 6 = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 12$$

I. ㉚5 ㉛3

[範圍] 第二冊三角函數

[詳解]

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 49 \therefore \overline{BC} = 7$$

作 $ABA'C$ 為以 M 為中心的平行四邊形

$$\text{由平行四邊形定理得 } \overline{AA'}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$$

$$\overline{AA'}^2 + 7^2 = 2(3^2 + 5^2) \Rightarrow \overline{AA'}^2 = 19 \Rightarrow \overline{AA'} = \sqrt{19}$$

$$\cos \angle BAM = \frac{3^2 + \sqrt{19}^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{19}} = \frac{3}{6\sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{76}}$$

$$\text{所以 } \tan \angle BAM = \frac{\sqrt{\sqrt{76}^2 - 1^2}}{1} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

