函數極限的 ε，δ 定義

令

$$f(x)=x\text{。}$$

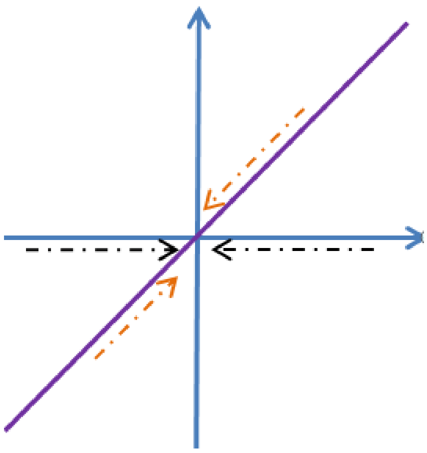
這是一個大家都十分熟悉的函數，且我們不難察覺到當 $x\to 0$ 時，它的極限是 0。然而，在「正式地」考慮它的極限時，我們使用了一項嚴謹的定義：

> $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 表示：對意的 $\varepsilon>0$，皆有對應的正數 δ 使得
>
> 若 $0<|x-c|<\delta$，則必有 $|f(x)-L|<\varepsilon$。

初次看到這類「繁雜」的敘述時，我們難免對它感到困惑。為什麼如此明顯的「現象」，我們卻要這樣抽象地把它弄成這麼不友善的文字？

我們可以從根本的問題著手：當我們說當 $x\to 0$，會有 $f(x)\to 0$ 時，我們只是感受到那樣的趨勢罷了，但我們並沒有把那樣的感受傳達出去。也許反方會說：那樣的趨勢「一看就明白了」，但是在靠近時，並沒有任何一個函數值是明確的 0，我們又從何點出這樣的趨近關係？

然而，嚴謹的定義正是把我們的直觀與觀察，或是想表達的描述寫成文字罷了。也許我們這才恍然大悟：深藏彼此心中的直觀原來這麼複雜！



換個角度思索：事實上，並不是每個函數對任一點的趨近情形都很容易觀察（甚至函數的樣貌就即充滿神祕）。例如：

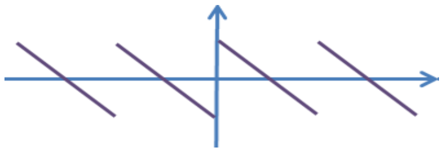
$$e(x):=(1+\frac{1}{x})^{x},\qquad E(x)=x^{x^{x}},\qquad \Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt,$$

$$f(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k!)!},\qquad f(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k!)^2}\qquad S(x)=\int_0^x \sin\sin\sin t\,dt$$

更有甚者，倘若我們沒依循嚴謹定義，而僅僅以直觀的認識操作極限，將導致接二連三的「災難」，以下有三：

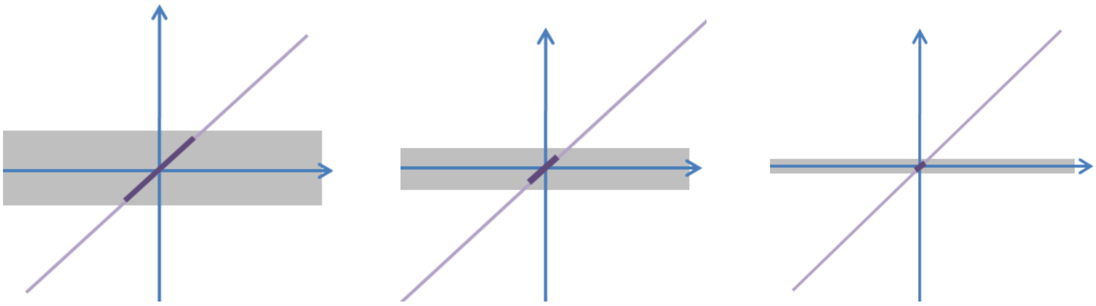
（i）$0=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x}{x+y}=1$ ------ 直觀讓我們有這樣的操作。

（ii） 連續函數的和必為連續，因此 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$ 連續，但它的圖形如下：



（iii）我們總是覺得連續函數必可微，縱使不，那也必定「片段可微」。但事實上存在有處處連續處處不可微的函數，由德國數學家 Weierstrass 發現。

我們難免從這些事件質疑起既往的直觀，並且從中提問：是不是真的需要一些媒介，來表達我們對極限的看法？我們不仿從一些具體的例子尋找靈感，或許誤差是個好的切入點。



誤差= 0.3　　誤差= 0.1　　誤差= 0.04

如上圖，令 $f(x)=\frac{11}{10}x$，L = 0。

例1. 我們若希望誤差 $\lvert f(x)-L\rvert<1$，即誤差值< 1。那麼 x 要多靠近 0？

[解] 由 $\lvert f(x)-0\rvert=\left\lvert\frac{11}{10}x\right\rvert<1$，我們察覺到 x 與 0 的距離 $\lvert x\rvert$ 必須 $<\frac{10}{11}$。

例2. 若希望 $\lvert f(x)-L\rvert<0.04$，則 x *與 0 的距離*必須多小？

[解] 承上，解不等式 $\lvert f(x)-0\rvert=\frac{11}{10}\lvert x\rvert<0.04$ 得 $\lvert x\rvert<\frac{2}{55}$。

例 3. 假設當 $\lvert x-0\rvert<\delta$ 時，皆有 $\lvert f(x)-L\rvert<\frac{1}{1000}$，求 δ。

[解] 承上，欲使 $\frac{11}{10}\lvert x\rvert<\frac{1}{1000}$，可取 $\delta=\frac{1}{300000}$。

註：在這裡我們要求的並不是所有能滿足要求的 δ，而是只需找出「一個」δ 滿足不等式即可。事實上，大部分估計誤差時，很難找出那個最大的 δ。

例4. 設ε為大於 0 的正數，問當 x 和 0 的誤差在小於何數(δ)時會滿足 $\|f(x)-L\|<\varepsilon$？

［解］ 同上，可解出$|x-0|<\dfrac{10}{11}\varepsilon$，因此可取$\delta=\dfrac{10}{11}\varepsilon$。也就是指當 x 與 0 的誤差夠小（小於δ，即$\dfrac{10}{11}\varepsilon$）時，函數值與極限的誤差$|f(x)-0|$將會像要求的那樣小（$<\varepsilon$）

註：同樣地，若要取$\delta=\dfrac{1}{1000}\varepsilon$也行。

縱合以上的推導，對於誤差ε的給定以及對應的δ，我們可以做出視覺化的表格，如下（這只是一組選法，我們可以有其他選擇）：

誤差$\|f(x)-L\|$	1	0.3	0.1	0.04	10^{-10}	1.6×10^{-19}	ε
δ的取值	$\frac{10}{11}$	$\frac{7}{450}$	$\frac{11}{360}$	$\frac{5}{31577}$	$\frac{1}{10^{100}}$	$\frac{1}{6\times10^{23}}$	$\frac{1}{50}\varepsilon$

我們用來定義「極限」的想法正是對誤差的掌握。它的原始構想是：

當$x\to c$，$f(x)\to L$表示：當 x 不段地（從兩邊）靠近 c 時，
$f(x)$將無止境地逼近 L 。且要多接近 L 就能多接近 L。

把它講更清楚，就是：

給定誤差的限制ε，此函數的值皆能在當 x 與 c 夠靠近時（距離比某個δ小）與極限值(L)保持在要求的誤差範圍ε之內。

用數學的型式表示即為正式定義：

$\lim_{x\to c} f(x)=L$ 代表：對任意的$\varepsilon>0$，皆存在$\delta>0$，滿足

每當$0<|x-c|<\delta$時，皆有$|f(x)-L|<\varepsilon$

註解：敍述中$0<|x-c|<\delta$刻意排除 0 的用意在於：討論極限時不考慮 x=c 的函數值，只考慮 c「旁邊」的值。

讓我們來正式地用嚴格的定義證明一些事情。

例 5. $\lim\limits_{x\to1}2x+3=5$

[想法] 對於給定的誤差要求ε，先估計 $|(2x-3)-5|$ 的值，我們期望找出 $\delta=$___，滿足

若 $0<|x-1|<$ ___，則 $|(2x-3)-5|<$ 誤差ε。

事實上我們正是在解不等式

$$|(2x-3)-5|<\varepsilon,$$

並且以 $|x-1|<$___ 的型式表示部分解。因此從$2|x-1|=|(2x+3)-5|<\varepsilon$，我們解得$|x-1|<\varepsilon/2$。故可以取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$。(其實取$\dfrac{\varepsilon}{3},\dfrac{\varepsilon}{50},\ \dfrac{\varepsilon}{80000}$等都行)

[證明] 對任給的$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, 則每當 $0<|x-1|<\delta$時，

$$|(2x+3)-5|=2|x-1|<2\delta=2\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon\ 。$$

例 6. $\lim\limits_{x\to c}1=1.$

[想法] 對任意的$\varepsilon>0$，要找$\delta=$___>0，滿足若 $0<|x-c|<$___，$|1-1|<\varepsilon$。
此即解不等式 $|1-1|<\varepsilon$，並且以 $|x-c|<$___ 表示。
但 $0<\varepsilon$ 恆成立，因此空格填任何正數皆可。

〔證明〕估計誤差$|1-1|=0$。對任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=1$，則每當$0<|x-c|<\delta$時，

$$|1-1|=0<\varepsilon\ 。$$

例 7. $\lim\limits_{x\to 50}|x|=|50|.$

[想法] 對$\varepsilon>0$，要找$\delta=$___，使得只要$0<|x-50|<$___，$||x|-|50||<\varepsilon$。類似地，我們即將求解，但在這之前得先使用一點技巧。

<u>Key</u>: 利用不等式 $||a|-|b||\le|a-b|$，我們要估計誤差：

$$||x|-|50||\le|x-50|$$

如果我們能讓此不等式右端 $|x-50|<\varepsilon$，則我們就滿足誤差要求。

而$|x-50|<\varepsilon$恰好已經是解的型式，故可以取$\delta=\varepsilon$。

[證明] 先估計誤差$||x|-|50||\le|x-50|$。對$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，則當$0<|x-50|<\delta$時

$$||x|-|50||\le|x-50|<\delta=\varepsilon$$

.

例8. $\lim_{x\to 2} x^2+1=5$.

[想法] 對 ε >0，需找需找 δ = ___ > 0 ，使得當 0 < |x – 2 |< ___ 時，

$$0 < |(x^2+1) - 5| = |x+2|\ |x-2| < \varepsilon.$$

Key 1: 在前述幾題中，我們尋找 δ 時，都是從所有正數中尋找。因為 |x+2| 是個不易控制的因素，我們嘗試在 1 以下的數值中尋找合適的 δ，也就是限制|x-2| < 1。

此時有 1 < x < 3，因此 |x+2| < 5 。這代表著在這個限制之下我們估計出

$$|(x^2+1) - 5| = |x+2|\ |x-2| < 5\ |x-2|.$$

Key 2: 對此，若我們能進一步地滿足 5|x-2| < ε，則我們將滿足誤差的要求（定義）。

但注意到，δ 的取法並不僅僅是 ε /5 而已，因為我們在最初已經要求 δ 必須從 < 1 的正數尋找，因此 δ 應取 ε /5 和 1 之中比較小的那一者（通常前者會比較小）。

[證明] 對 ε > 0，先限制|x-2|<1，此時有 1 < x < 3，即 |x+2| < 5。在此限制之下估計誤差得

$$|(x^2+1) - 5| = |x+2|\ |x-2| < 5\ |x-2|.$$

此時，取 δ = min {1, ε /5} ，則當 0 < |x – 2 |< δ 時，必有

$$|(x^2+1) - 5| < 5\ |x-2| < \varepsilon.$$

例 9. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$，則 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$.

［觀察］要估計的誤差為 $|(f(x)+g(x))-(M+N)|$，可估計的誤差是 $|f(x)-M|$ 和 $|g(x)-N|$。我們不難觀察並做出這項轉換：

$$|(f(x)+g(x))-(M+N)| = |(f(x)-M)+(g(x)-N)|$$

並且

$$|(f(x)-M)+(g(x)-N)| \le |f(x)-M| + |g(x)-N|$$

這就是關鍵 !!

［證明］(a)先估計

$|(f(x)+g(x))-(M+N)| = |(f(x)-M)+(g(x)-N)| \le |f(x)-M| + |g(x)-N|$，我們希望它 < 給定的正數 ε。

(b)倘若我們能將此誤差範圍分配給 $|f(x)-M|$ 和 $|g(x)-N|$ 來達成，即我們希望滿足 $|f(x)-M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，且 $|g(x)-N| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，則此事了矣。

(c)因為$\lim_{x\to c} f(x)=M$，若我們以$\frac{\varepsilon}{2}$為要求的誤差範圍，則必有某個δ_1

使得每當$0<|x-c|<\delta_1$時，$|f(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}$。

(d)因為$\lim_{x\to c} g(x)=N$，若我們以$\frac{\varepsilon}{2}$為要求的誤差範圍，則必有某個個δ_2

使得每當$0<|x-c|<\delta_2$時，$|g(x)-N|<\frac{\varepsilon}{2}$。

(e) 取$\delta=\text{Min}(\delta_1,\delta_2)$，兩者中較小的一者，則當$0<|x-c|<\delta$時，

$$\left|(f(x)+g(x))-(M+N)\right| \le |f(x)-M|+|g(x)-N|$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\substack{\text{因為 } 0<|x-c|<\delta,\ \delta\le\delta_1, \\ \text{所以由 (c) 有 } |f(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\substack{\text{因為 } 0<|x-c|<\delta,\ \delta\le\delta_2, \\ \text{所以由 (d) 有 } |g(x)-N|<\frac{\varepsilon}{2}}} = \varepsilon$$

〔註〕：未必要以$\frac{\varepsilon}{2}$，$\frac{\varepsilon}{2}$對分。事實上也可以$\frac{\varepsilon}{100}$，$\frac{\varepsilon}{3000}$分，只是到最後會變成

$$.......<\frac{\varepsilon}{100}+\frac{\varepsilon}{3000}=\frac{31}{3000}\varepsilon<\varepsilon$$

這套方法僅僅是由估計的技術嚴格地闡述極限的內涵而已。在操作上，我們不難察覺到最關鍵的步驟正是尋找一個合適的δ，並且驗證這個δ能滿足我們的估計要求。特定類型的函數有比較常用且好用的找法：諸如常數型，一次型，絕對值，二次型，根式型，三次型。然而，極限的定義只是一個「想法」，我們不得不承認這是個很難使用的想法。因而，往後我們將推導出好用的定理(如四則運算)以協助我們求取極限。事實上，到那時候我們又因為一系列的定理而把極限「回復」到直觀的操作。

後記：這六頁的短文試圖表現出極限這個概念的全貌，從思想，辯析，定義，到操作。即便它看起來是複雜而難懂的，但它的本質卻既簡明又乾淨。在概念的描述上，我盡可能以完整但人性化的簡易方式處理，以達到釐清概念的效果。因此我混合了論文寫作的格式，教科書的寫法，中小學科展的論文表現方式，補習班式的講義編排等技巧，可說集各派別之大成，也可說是毫無章法的雜亂之作。但我仍期望有人能夠因為它又獲得些什麼———這將會是件有意義的事。