數列極限的 ε , N 定義

令

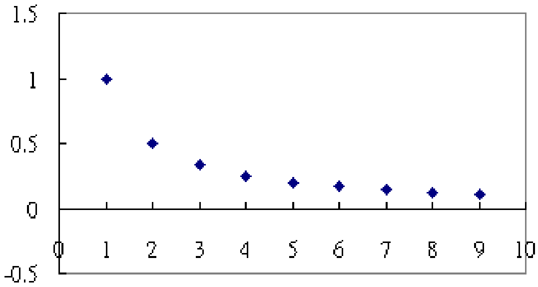
$$a_n = \frac{1}{n}。$$

這是一條大家都十分熟悉的數列，且我們不難察覺到它的極限是 0。然而，在「正式地」考慮它的極限時，我們使用了一項嚴謹的定義：

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 表示 對意的 $\varepsilon > 0$，皆有對應的自然數 N， 使得每當足碼 $n \geqq N$ 時，皆有 $\lvert a_n - a \rvert \le \varepsilon$ 。

初次看到這類「繁雜」的敘述時，我們難免對它感到困惑。為什麼如此明顯的「現象」，我們卻要這樣抽象地把它弄成這麼不友善的文字？

也許我們該弄清楚這個定義的背後思維，也就是為什麼需要這樣的定義，如何想出這個定義，以及這個定義該如何使用。(註：從數列級數開始被廣泛探討至這個定義的出現，共歷時 250 年，它是一段漫長思想的精髓。)



首先，我們如何得知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ？也許直觀的回應正是「看圖形的趨勢」，「憑著數字的變化傾向」。但是僅僅憑著趨勢、傾向真的能說數列「趨近」0 嗎？真的可以「篤定地」宣稱極限值就是 0？但數列裡並沒有任何一項是 0，我們究竟如何讓這些項和 0 產生關聯？

「趨近」是什麼？

我們似乎有一種想說但說不出個所以然的想法在心中打轉，我們似乎從數列中「感受到」某種趨勢，我們也許察覺到似乎有某個原則在背後運作著，而我們想找到它，我們需要一個客觀的標準來說明數列的收斂性及其極限，而這套標準必須排除直觀。

即使不以哲學的角度探討它，在數學上它仍有重要之處。並不是每個數列的趨近情形都能輕易被察覺。例如（下述數列有 6 個收斂 2 個發散）：

$$(1+\frac{1}{n})^n,\quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2},\quad \sqrt[n]{n},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

$$\sin n,\quad (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{3^n}),\quad \sqrt[n]{n!},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k},\ 等。$$

更有甚者，倘若我們沒依循嚴謹定義，而僅僅以直觀的認識操作極限，將導致接二連三的「災難」，例如：

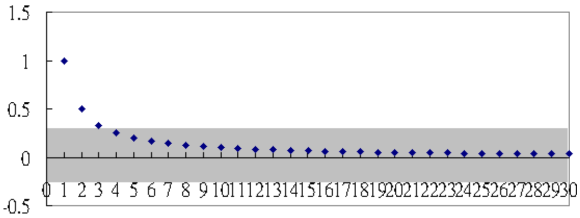
$$0=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{n}{n+m}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+m}=1$$

第一個等號乃因極限的基本計算而成立；第二個等號成立於：由於兩者皆表示 n, m 皆向無窮大逼近，因此表達相同的意涵；第三個等號同樣為極限的計算。

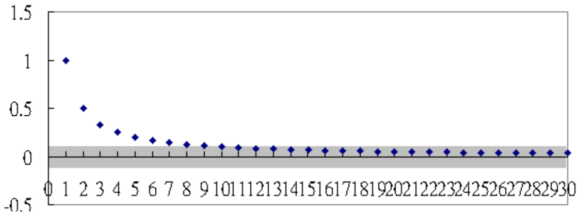
我們因此推論出 $0=1$，但很明顯 $0\neq 1$———災難！但問題出在哪裡？很不幸地，是第二個等號。我們誤把無限大當作「非常巨大的數」，因此誤把「lim」當「$\sum$ 」對調順序。(對極限深入探討之後，我們將自然而然注意到這類型的危險動作，事實上它是有條件成立的。)

我們也許真的需要一個嚴謹的方式，以表述我們的直觀，以處理複雜的問題，以避免一些謬誤。我們不仿觀察看看是什麼因子讓我們覺得這個數列「收斂」。

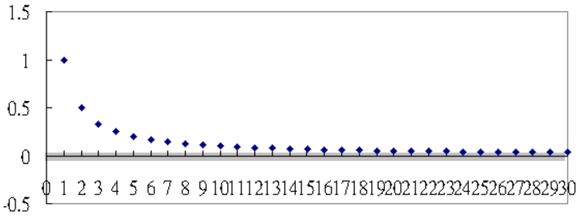
誤差是個直接的切入點，我們希望收斂的數列與它的極限值能被逐步縮小的誤差所「掌控」。或許熟悉的數列能給我們一點靈感：



誤差 ＝0.3



誤差 ＝0.1



誤差 ＝0.04

如上圖，令$a_n=\dfrac{1}{n}$，$a=0$。

例1. 我們若希望誤差 $|a_n-a|<1$，即誤差值<1。那麼我們需要加多少項？

[解] 由 $|a_n-a|=\dfrac{1}{n}<1$，我們解得$n>1$，即$n\geq 2$，也就是第 2 項起數列的值將落在要求的誤差範圍內。

例2. 若希望$|a_n-a|<0.04$，則需加到哪一項？

[解] 承上，欲使$\dfrac{1}{n}<0.04=\dfrac{1}{25}$ $\Rightarrow$ $n\geq 26$。

例 3. 假設加到第 N 項之後皆有$|a_n-a|<\dfrac{1}{1000}$，求 N。

[解] 承上，欲使$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1000}$，可取 $N=3000$。

註：在這裡我們要求的並不是 n 的所有範圍，而是要求出「一個」N 使得只要比 N 大的數 n，皆滿足不等式。事實上，大部分時候在估計誤差時，很難找出那個最小的 N。

例4. 設ε爲大於 0 的正數，問從哪一項 (a_n)開始會滿足$|a_n-a|<\varepsilon$？

[解] 同上，可解出$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$。為了找出一個確切的起始項滿足誤差的要求，我們必須「湊」出一個大於$\dfrac{1}{\varepsilon}$的整數。事實上，先「去小數」再加 1 是個好用的手法，即我們可以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$。因此，從第 N 項開始，即滿足要求的不等式。

註：同樣地，若要取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+100$ 也行。

縱合以上的推導，對於誤差的給定以及對應的 N，我們可以做出視覺化的表格，如下（這只是一組選法，我們可以有其他選擇）：

誤差$\lvert a_n-a\rvert$	1	0.3	0.1	0.04	10^{-10}	1.6×10^{-19}	ε
N 的取值	2	50	80	81	10^{100}	6×10^{23}	$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+100$

我們用來定義「極限」的想法正是對誤差的掌握。它的原始構想是：

$a_n \to a$ 表示當 n 不斷增大時，a_n 將無止境地
逼近 a，且要多接近 a 就能多接近 a。

把它講更清楚，就是：

給定誤差的限制 ε，此數列皆能在夠多項之後（第某個 N 項）與極限值(a)保持在要求的誤差範圍 ε 之內。

用數學的型式表示即為正式定義：

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 代表對任意的 $\varepsilon > 0$，皆存在 $N \in \mathrm{N}$，使得

每當 $n \ge N$ 時，皆有 $|a_n - a| < \varepsilon$

讓我們來正式地用嚴格的定義證明一些事情。

例 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

[證明] 先估計 $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$。若我們要它 $<\varepsilon$ （$\varepsilon>0$ 為給定)，則必須有 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$。

因此可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$。則當 $n\ge N$ 時，

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}\le^{\text{註}}\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon、$$

（註：由高斯函數的性質 $[x]\le x<[x]+1$，取倒數即得。）

例 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$.

[證明] 先估計 $\left|\dfrac{2n}{n+1}-2\right|=\left|\dfrac{2n-2n-2}{n+1}\right|=\dfrac{2}{n+1}$。若要此誤差< 正數 ε，則有

$$\frac{2}{n+1}<\varepsilon \iff n>\frac{2}{\varepsilon}-1$$

因此，取 N 為比 $\dfrac{2}{\varepsilon}-1$ 大的自然數即可，可取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$。此時，一旦 $n\ge N$，必有

$$\left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right|=\frac{2}{n+1}\le\frac{2}{N+1}=\frac{2}{(\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1)+1}\le\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}+1}<\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}}=\varepsilon、$$

例 7. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

[證明] 先估計

$$\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right|=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<_{\text{拿掉}\sqrt{n+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

對 $\varepsilon>0$，若能使 $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，則誤差也會 $<\varepsilon$。用同樣的技術，取

$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+100$，則當 $n\geq N$ 時，必有

$$\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+100}}\leq\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}}=\varepsilon、$$

例 8.若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，且 $\lim_{n\to\infty}b_n=b$，則 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

[觀察] 要估計的誤差為 $|(a_n+b_n)-(a+b)|$，可估計的誤差是 $|a_n-a|$ 和 $|b_n-b|$。我們不難觀察並做出這項轉換：

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)|$$

並且

$$|(a_n-a)+(b_n-b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|$$

這就是關鍵 !!

[證明] (a)先估計 $|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\leq|a_n-a|+|b_n-b|$，我們希望它 <給定的正數 ε。

(b)倘若我們能將此誤差範圍分配給 $|a_n-a|$ 和 $|b_n-b|$ 來達成，即我們希望

滿足 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$，則此事了矣。

(c)因為 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，若我們以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 為要求的誤差範圍，則必有某個足碼[註] N_1

使得每當 $n\geq N_1$ 時，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$。

(d)因為 $\lim_{n\to\infty}b_n=b$，若我們以 $\frac{\varepsilon}{2}$ 為要求的誤差範圍，則必有某個足碼[註]

N_2 使得每當 $n \ge N_2$ 時，$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$。

(e) 取 $N = Max(N_1, N_2)$，兩者中較大的一者，則當 $n \ge N$ 時，

$$\left|(a_n + b_n) - (a + b)\right| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \underset{\substack{\text{因爲 } n \ge N,\ N \ge N_1,\\ \text{所以由 (c) 有 } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}}}{\frac{\varepsilon}{2}} + \underset{\substack{\text{因爲 } n \ge N,\ N \ge N_2,\\ \text{所以由 (d) 有 } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}}}{\frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon$$

〔註〕：未必要以 $\frac{\varepsilon}{2}$，$\frac{\varepsilon}{2}$ 對分。事實上也可以 $\frac{\varepsilon}{100}$，$\frac{\varepsilon}{3000}$ 分，只是到最後會變成

$$\ldots\ldots < \frac{\varepsilon}{100} + \frac{\varepsilon}{3000} = \frac{31}{3000}\varepsilon < \varepsilon$$

〔註〕：足碼為 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 的 1,2,3,…。

綜觀上述的證明，我們其實只是在做一件事：找 N。在證明的過程中，我們用盡可行的方法尋找那樣的 N，以滿足我們對估計的要求（即誤差 ＜ε）。在上述四個關於極限操作的例子裡面，它們的 N 並不難找，事實上，前三例（例 5~例 7）的 N 可直接估得，第四例(例 8)則利用已知的極限估得所證的極限。

如果行有餘力，我在此列出數個 N 比較難找的例子（在任何教科書裡閱讀它們的證明時，不仿留意作者在找 N 時的手法）：

(A) 單調收斂定理：遞增（降）有界的數列必收斂。

(B) Bolzano–Weierstrass 定理：任何有界數列必有收斂子列。

(C) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，則 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$。

後記：這篇文章只意圖把關於極限的嚴格論證及其背後思想詮釋清楚，它摻雜了一些數學哲學的觀點，以及一個概念的來龍去脈，和處理數學問題的思路剖析，所使用的表達方式混合（參照）了論文寫作的格式，教科書的寫法，中小學科展的論文表現方式，補習班式的講義編排等，可以說是個什麼都是也什麼都不是的大雜燴。我以個人短淺的能力完成了它，只期望初入這行的新人能更順利地融入嚴謹的思維（這是門硬功夫）。如果有人能因此有些微的成效，本人將感到欣慰。

[[[這是文鼎鋼筆行楷]]]