線性代數的無言總複習

1. 向量空間(Vector spaces)

{1.1}向量空間：(V, ⊕, ⊙),

V 非空，

⊕ : V×V→V，⊙: R×V→V 爲運算，

滿足

[A1] ∀ v,w　　$v\oplus w = w\oplus v$

[A2] ∀ u,v,w　　$(u\oplus v)\oplus w = u\oplus(v\oplus w)$

[A3] ∃o 使得 ∀ v　　$v\oplus o = v$

[A4] ∀v, ∃u 使得　　$v\oplus u = o$.

[S1] ∀ α,v,w　　$\alpha(v\oplus w)=(\alpha\odot v)\oplus(\alpha\odot w)$.

[S2] ∀ α,β,u　　$(\alpha+\beta)\odot u=(\alpha\odot u)\oplus(\beta\odot u)$

[S3] ∀ α,β,u　　$(\alpha\beta)\odot u=\alpha\odot(\beta\odot u)$

[S4] ∀ v　　$1\odot v = v$.

Ex: (i) R^n, (ii) R^∞, (iii) Poly, (iv){上三角矩陣}

(v) C[0,1]. (vi) R[0,1]. (vii) L(V).

(ix) 能否使 (R,+,·)和(R,+',·')皆是向量空間？(*)

Note: 如何確定 V 非向量空間?

(否定運算, 否定性質)

{1.2}子空間 Subspaces, W: V 的非空子集, 滿足:

(i) 對 $v,w\in W$ $v+w\in W$.

(ii) 對 $\alpha\in R, v\in W$, $\alpha v\in W$.

Ex: $\{(a,b,0)\}_{a,b}$ of R^3; span of vectors.

Note: 行空間 Column Spaces (它的 Sense)

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\5&5&1\end{bmatrix}\mapsto\left\{\alpha\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}+\beta\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix}+\gamma\cdot\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}:\alpha,\beta,\gamma\in R\right\}$$

{1.3}解空間 Nullspaces。

2. 矩陣：

{2.1}基本性質

加法: $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$、

係數積: $1000\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1000&2000\\3000&4000\end{bmatrix}$、

乘法: $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&22\\43&60\end{bmatrix}$.

(何時可乘?? $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ $(AB)_{ij}$)

結合律: (AB)C = A(BC),

分配律: A(B+C) = AB+AC;

(B+C)D =BD+CD. (它們怎麼證?)

沒有交換律: $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

{2.2}矩陣的變換.

(Reduced) Row-Echelon Form.

Gauss(-Jorden) 消去法.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\-1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$$

V.S. 基本矩陣(elementary matrices):

$$\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\alpha\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\\alpha&&1\end{bmatrix}$$

Pivot:

可逆: A 可逆 ⇔ A 可化爲 I

⇔存在 B 使 AB=BA=I

(如何求反矩陣?? 三種方法.) ~請@黃千譯示範.~

轉置: 行列對換, $A_{ij} = (A^T)_{ji}$.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$(AB)^T = B^TA^T$

$(AB)^H = B^HA^H$ (*)

LU, LDU 分解: (PA=LU, LDL^T)

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\4&1&0\\-2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\-1&-3&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&1\\&-1&-2\\&&-4\end{bmatrix}$$

~請@黃千譯示範.~

3. 方程組的討論

{3.1} Ax = 0

{3.2} Ax = b , $x = x_p + x_h$

{3.3} 解空間，解的維度，

解集合，方程組分類。

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&3\\3&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$$ ~請@黃千譯示範.~