向量空間的引進動機

王玹

向量空間的引進在思想上是為了把諸多我們所熟知的相似概念串接在一起並且一般化。藉由這樣的推導，可以得知它們的一般性質，使得在應用時更加方便且容易———也就是建立一個好用的「模型」。

I. 平面向量

在平面上，我們很熟悉向量的運作模式。關於加法，我們使用平形四邊形法；對於係數積，我們聯想到伸縮的概念。對於「+」和「·」兩個運算，並不難證出它滿足曾經學過的性質：

[A1]	∀ v,w	v + w = w + v.
[A2]	∀ u,v,w	(u+v)+w = u+(v+w).
[A3]	∃ 0 向量使得	v + 0 = v.
[A4]	∀v，∃u 使得	v + u= 0.
[S1]	∀ α,v,w	α(v + w)=(αv) + (αw).
[S1]	∀ α,β,u	(α+β) u =(αu) + (βu).
[S1]	∀ α,β,u	(αβ) u =α (βu)
[S4]	∀ v	1 v = v .

〔斜座標〕

以座標變換的觀點，我們可算出

$$\left(2,3\right)=\alpha\cdot\left(1,1\right)+\beta\cdot\left(-2,3\right)$$

中的α，β值，即用斜座標標示點(2,3)的方法（以(1,1), (-2,3)兩向量分別當座標軸）。因此我們有：

$$\left(2,3\right)=\left[\alpha,\beta\right]_{\text{關於}(1,1)\text{ , }(-2,3)}$$

我們還可以再問：是否對任何 $x_0, y_0\in\mathbf{R}$，皆可以找到對應的$\left(r.s\right)$滿足

$$\left(x_0,y_0\right)=\left[r,s\right]_{\text{關於}(1,1)\text{ , }(-2,3)}\text{。}$$

答案是肯定的，也因此我們可以確保斜座標的使用可以標示出平面上的每一個點，這代表斜座標是個「好用[Ψ]」且「完整[Ψ]」的座標。

II. 多項式

考慮二次多項式

$$\mathrm{P}_2\left[x\right]:=\left\{\ a_0+a_1x+a_2x^2\ |\ a_0,a_1,a_2\in\mathbf{R}\ \right\}，$$

我們不難看出它和空間中的座標向量

$$\mathbf{R}^3:=\left\{\ \left(a_0,a_1,a_2\right)\ |\ a_0,a_1,a_2\in\mathbf{R}\ \right\}$$

很像（以加法和係數積的角度）。事實上在某個層面我們可把它們「當作」同樣的概念來思考。

以下讓我們回顧求取多項式餘式的方法。

〔牛頓插值法〕

對於多項式$f(x)$，若設定除式為$(x–1)(x–2)(x–3)$，根據牛頓插值法我們可以這樣假設餘式：

$$f(x) = (x–1)(x–2)(x–3)\ q(x) + \alpha(x–2)(x–3) + \beta(x–3) + \gamma。$$

這時候我們產生個疑惑：是否任意二次式皆可表現成

$$P(x) = a\ (x-2)(x-3) + b\ (x-3) + c$$

的樣式，也就是問

$$\left\{a_0+a_1x+a_2x^2\ |\ a_j\in\mathrm{R}\right\}$$

$$=\left\{\ a\left(x-2\right)\left(x-3\right)+b\left(x-3\right)+c\ |\ a,b,c\in\mathrm{R}\ \right\}$$

是否成立。不難驗證答案是肯定的，事實上，我們可以「體會」到下述事情：

二次式$P_2\left[x\right]$是由（x – 2)(x – 3)，(x – 3)，以及 1 所「展成」、「延展」、「編織」而成的。

類比於斜座標，上述的想法就像在更換用以標示多項式的「座標軸」，而這時候，我們其

Ψ 好用一詞我在此暗指線性代數裡「線性獨立」的概念。

Ψ 完整一詞我在此暗指線性代數裡「可展成整個平面」的概念。

實已悄悄地把多項式當作向量在操作，也就是說我們是藉由向量的想法認識這個性質的。

III. 費氏數列

底下還有一個類似的例子。考慮滿足下式的數列：

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

藉由它的推導，我們察覺到

$$a_n = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

其中，$p_n := (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$，$q_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ 為兩條滿足上式的等比數列，也就是指

$$a_n = \alpha \cdot p_n + \beta \cdot q_n$$

即，$\{(a_n) | a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\}$ 是由 (p_n) 和 (q_n) 兩條數列所「展成」的。

有了這個經驗，對於較廣義的費氏數列我們會試圖尋找較簡便的做法。例如，我們將要確認滿足下式的數列

$$b_{n+2} = b_n + 2b_{n+1}. \qquad (**)$$

是否皆能表成此類等比數列的和，即：

$$b_n = \alpha\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \beta\left(1-\sqrt{2}\right)^n.$$

我們知道形如 $f_n = \alpha\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \beta\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ 的數列皆滿足(**)式。需要確認的是：是否滿足(**)式的數列(b_n)皆可表成這種形式。也就是問 $p_n = (1+\sqrt{2})^n$ 和 $q_n = (1-\sqrt{2})^n$ 能否「展成」全體 $\{(b_n) | b_{n+2} = b_n + 2b_{n+1}\}$。

IV. （一般化）向量空間

這些問題是類比的，也可以說它們是一體的。我們從中看到了相似的特性——它們在某個層面來說都很像「向量」，不同以往的向量。基於這樣的相似性，我們很合理地嘗試一拼討論所有狀況。

為了完整而廣泛地討論，我們不限定討論的對象（集合），也不會指明其中的運算規則。因此，初始的設定僅僅有一個給定的集合Ｖ和兩個運算

$$\oplus : V \times V \to V$$
$$\odot : R \times V \to V.$$

前者將任何一對Ｖ中的元素對應到某一個Ｖ的元素，而後者將一個實數和一個Ｖ的元素對應到某個Ｖ的元素。被對應到的元素，為了方便起見，分別以 $v \oplus w$，$r \odot w$ 表示。

這兩個運算不得太隨性，否則會失去原先期望的效果——會達不到我們期望它「像向量」的運算結構。例如設定Ｖ= R^2，運算規則設定為

$$(v_1,v_2) \oplus (w_1,w_2) = (3v_1 + w_1, v_2 w_2)$$
$$r \odot (v_1,v_2) = (3, v_1)$$

這是個怪異又無聊的運算，無法讓我們感受到任何想法。因此我們希望⊕和⊙這兩種運算滿足一些特定的性質———我們可說它是約定，如此一來，在這個一般化的框架之下，對於給定的「特例」，我們可以從容地面對，而不會自亂陣腳，重複地做同樣的苦差事。

我們選定了下列的兩組性質做為約定：

[A1]	$\forall$ v,w	v⊕w = w⊕v.
[A2]	$\forall$ u,v,w	(u⊕v)⊕w = u⊕(v⊕w).
[A3]	$\exists$ o 使得 $\forall$ v	v⊕o = v.
[A4]	$\forall v$, $\exists u$ 使得	v⊕u= o.
[S1]	$\forall$ α,v,w	α⊙(v⊕w)=(α⊙v)⊕(α⊙w).
[S1]	$\forall$ α,β,u	(α+β)⊙u =(α⊙u)⊕(β⊙u).
[S1]	$\forall$ α,β,u	(αβ)⊙u =α⊙(β⊙u)
[S4]	$\forall$ v	1⊙v = v .

滿足這些特性的代數結構 (Ｖ,⊕,⊙)，就稱為「向量空間」！（Ｖ的元素稱為向量，此處的向量已不再是既往熟知的平面或立體向量，而是一般化後的新名詞）

有了一般型的向量空間，我們可以推導一般化的性質。往後的任務將有探討它的「構成模式」，即基底，維度，對於兩空間之間的關係，可討論的範圍包含空間之間的「線性」對應，以及兩空間之間結構上的相似性。此外，我們還可以在向量空間上建立內積，角，長度（它們也是抽象化的結果）等概念。

熟知了一般化的模型，在遇到特殊但好用的向量空間時，我們面對它將更得心應手，同時，我也具備了更寬廣的視野。