費氏數列的一般項

一丈青·重臻

初版：Febrary 26, 2013； 2017秋, 修改

滿足$F_1 = F_2 = 1$且對任意$n \in \mathbb{N}$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \tag{1}$$

的數列稱爲費氏數列。經過簡易計算可得出它的前幾項爲$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$。類比於已熟知的等比、等差、階差數列，有趣的事情是它的一般項。然而，它並不像前述的各種數列那樣簡潔。如果將它列出來，則是形如

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

的公式。

以下爲四種可行的推導方式。

1 線性法

廣義費氏數列只需要滿足(1)式即可，並且以$\mathscr{F}$表示所有費氏數列所形成集合。不難發現，$\mathscr{F}$中的數列滿足以下的線性性質：如果$(F_i)_i$, $(G_i)_i$爲費氏數列且$\alpha \in \mathbb{R}$，則

(i) 此數列 $(F_i + G_i)_i$也是費氏數列。

(ii) $(\alpha F_i)_i$ 是費氏數列。

證明. 因爲

$$\begin{aligned} F_{n+2} + G_{n+2} &= (F_n + F_{n+1}) + (G_n + G_{n+1}) \\ &= (F_n + G_n) + (F_{n+1} + G_{n+1}) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \alpha F_{n+1} &= \alpha(F_n + F_{n+1}) \\ &= \alpha F_n + \alpha F_{n+1}, \end{aligned}$$

可知此二者皆是費氏數列。 □

利用這個性質，我們於是可以用少許的「根基」數列，產生一系列新的費氏數列。也就是說，如果$(a_i)_i, (b_i)_i \in \mathscr{F}$，且$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，則

$$H_n := \alpha a_n + \beta b_n \tag{2}$$

也是個費氏數列。因此如果我們能夠適當地選擇根基數列$(a_i)_i$、$(b_i)_i$，以及係數α, β，使得$(H_i)_i = (F_i)_i := \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}$，即求得一般項。

現在，我們從熟悉的數列著手。如果$(b_i)_i$爲等差數列，則不難驗證滿足費氏條件的等差數列只有顯然解，因此我們把目標轉往等比級數。考慮$b_n = ar^{n-1}$，它是費氏數列意味著$ar^{n+1} = ar^{n-1} + ar^n$，其中$n$任意。爲了不讓解太無聊，不妨讓$a \neq 0, r \neq 1$。則

$$r^2 = r + 1. \tag{3}$$

求出r之後，我們得出兩組「基本型」的費氏數列$(a_i)_i, (b_i)_i = \left(\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{i-1}\right)_{i=1}^{\infty}$。將它代回(2)式，我們期望能求出兩係數使得$F_1 = F_2 = 1$。

解聯立方程

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha + \beta. \\
1 &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{\sqrt{5}}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}(\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

並且代回原式可得出上述的一般項。

2 階差法

另一種方式是利用階差數列。我們知道如果$a_{n+1} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) \cdot k$，在此以$k = 1$爲例，它的一般項求法如下：

$$\begin{array}{rr}
 & a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} \\
 & a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3} \\
 & \vdots \\
 & a_4 - a_3 = a_3 - a_2 \\
+) & a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \\
\hline
 & a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1
\end{array}$$

因此，利用此遞迴式可得到：

$$\begin{array}{rr}
 & a_{n-1} - a_{n-2} = a_2 - a_1 \\
 & a_{n-2} - a_{n-3} = a_2 - a_1 \\
 & \vdots \\
+) & a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \\
\hline
 & a_n = (n-1)a_2 - (n-2)a_1
\end{array}$$

。

如果們能把費氏數列的遞歸式改寫成階差的形式(如下(1) 式，α待定)，即可按照同樣方法求得一般項。若$\alpha \in \mathbb{R}$，則

$$\begin{aligned} a_n - \alpha a_{n-1} &= (1-\alpha)(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}) && (1)\text{式} \\ a_{n-1} - \alpha a_{n-2} &= (1-\alpha)(a_{n-2} - \alpha a_{n-3}) && (2)\text{式} \\ &\vdots \\ a_4 - \alpha a_3 &= (1-\alpha)(a_3 - \alpha a_2) && \text{(n-3)式} \\ a_3 - \alpha a_2 &= (1-\alpha)(a_2 - \alpha a_1) && \text{(n-2)式} \end{aligned}$$

此時，考慮(1)式$+(1-\alpha)\cdot(2)$式$+(1-\alpha)^2\cdot(3)$式$+\cdots+(1-\alpha)^{n-3}\cdot(n-2)$式得

$$a_n - \alpha a_{n-1} = (1-\alpha)^{n-2}(a_2 - \alpha a_1) \qquad (1)\text{式}$$

因此，

$$\begin{aligned} a_{n-1} - \alpha a_{n-2} &= (1-\alpha)^{n-3}(a_2 - \alpha a_1) && (2)\text{式} \\ a_{n-2} - \alpha a_{n-3} &= (1-\alpha)^{n-4}(a_2 - \alpha a_1) && (3)\text{式} \\ &\vdots \\ a_3 - \alpha a_2 &= (1-\alpha)(a_2 - \alpha a_1) && \text{(n-2)式} \end{aligned}$$

由(1)式$+\alpha\cdot(2)$式 $+\alpha^2\cdot(3)$式$+\cdots+\alpha^{n-3}\cdot(n-2)$式得

$$a_n - \alpha^{n-2} a_2 = (a_2 - \alpha a_1)(1-\alpha)^{n-2} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n-2}\right)}{1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

代入$a_1 = a_2 = 1$之後，求得

$$a_n = \frac{(1-\alpha)^n}{1-2\alpha} - \frac{\alpha^n}{1-2\alpha}.$$

又α的值，觀察最上方(1)式的a_{n-2}項係數，它須爲1，得$\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，即可得到完整的一般式。

3 矩陣法

如果我們能將費氏數列的遞迴式寫成另一種型式的**等比序列**，或許也有機會得到它的一般項。由於費氏數列是從兩個前項產生一個後項，也因此是前一組相鄰項產生後一組相鄰項，因此我們一次考慮兩個項，即a_{n+1}, a_n。考慮矩陣$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$，我們發現

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

因此$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$。也就是說，現在的目標就是設法求出$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$。我們使用固有值理論，令$\lambda$爲其固有值，它必須滿足以下行列式

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

此時$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。再藉由$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$，可以找出其中兩個固有項量爲$\mathbf{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$。將$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$化爲對角形式之後成爲

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & \\ & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} * & * \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

將此結果代回即可得出一般項。

4 生成函數

如果一個數列$\{a_n\}_n$滿足$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} > 0$，則在某個形如$[-R, R]$的閉區間內，

$$f : [-R, R] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

爲一個C^∞函數，且此冪級數爲這個函數的唯一冪級數表示法。嚴格地說，我們必須先假定費氏數列的項$F_n < 5^n$。利用第二歸納法它並不難證明，若$F_r < 5^r$，且$F_{r+1} < 5^{r+1}$，則$F_{r+2} = F_r + F_{r+1} < 5^r + 5^r < 5^{r+1}$。

現在於$[-R, R]$上給定函數

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k x^k.$$

將它的項寫出來，並且稍微處理一下可以寫成

$$\begin{aligned} f(x) &= F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \cdots \\ x f(x) &= \qquad\quad F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \cdots \\ x^2 f(x) &= \qquad\qquad\qquad + F_1 x^3 + F_2 x^4 + \cdots . \end{aligned}$$

則經過整理並代入$F_1 = F_2 = 1$，

$$(1-x-x^2)f(x) = x.$$
$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

又

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 x + \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 x^2 + \cdots\right] \\
&\qquad - \left[\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 x + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 x^2 + \cdots\right]\Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big\{\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] + \left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] x \\
&\qquad + \left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] x^2 + \left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^4\right] x^3 + \cdots\Big\}.
\end{aligned}$$

將它代回前式，再利用冪級數的唯一表示法，即可將F_n與求出的項相對應。

多變的方式，無非是要替這個遞迴的數列找點輪廓。讓人爲之一震的是，它居然透過無理數的運算而回到整數。即使它違反直覺，卻也展現出數學的美感。有些時候，數學不僅僅存在於用的範籌，更應該留意它美的成分。

縱橫這幾個方法，我們發現一件事情：針對同樣的遞迴式，不論前兩項如何修改，最終數列的一般解皆形如

$$a_n = \alpha\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

這個現象也呼應了第一節所用的「根基」數列這個詞語。不可否認，這樣的根基數列不唯一，也就是說如果我們適當地替換，選用其他數列作「根基」並搭配適當的係數也是可以表達任何給定的費氏數列，如下：

$$f_n = p\cdot c_n + q\cdot d_n.$$

此外，另一個值得注意的是不論透過何種方式，總歸地說，在求取費氏數列的一般項，皆有兩個步驟：

一、 求特徵多項式$x^2 = x+1$的根 。

二、 找出待定係數的值，並且代入通解。

這樣的通解對於不同的遞迴式 $a_{n+2} = ya_{n+1} + za_n$，只要其特徵多項式$t^2 = yt + z$有兩相異根，亦成立。 而這樣的流程，事實上正是透過根基數列生成欲探討的數列。此外，三階甚至是n階的遞迴數列（例如: $x_{n+3} = x_{n+1} + x_n$）也存在類似的做法，並且其生成的數列的數量至少是3個(n個）。由於它的論證需要進一步的理論支持，在此不再詳述。