千年風波———三次方程

前情(?)提要：

自古以來，人類總是對各種「方程」的解法感到神祕。其中，最具代表性、歷史最悠久的方程之一莫過於：

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad n \geq 1$$

當 $n=1$ 時：　$ax=b$ 則 $x=b/a$

當 $n=2$ 時：　$ax^2+bx+c=0$ 則 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

〈歷史上的記載〉

早在 4000 年前的巴比倫時代，由於測量、工程、建築等方面的需求，當時的人們已對二次方程有相當的發展成果。有一種典型的問題是：給定長方形的周長 a，面積 b，求長寬。對於這類型的問題，巴比倫人能夠善用 $\mathbf{(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$ 給出解答。此外，巴比倫人也具備了配方法的概念和技巧，對於任意給定的二之方程 $x^2=mx+n$，解得兩根為

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + n}$$

在已出土的巴比倫時代的泥板中，約有 300 片和數學有關，其中又分為列表類、和問題類。列表類抱括 乘法表、乘方開方表、倒數表、複利表、畢氏三元數表、$\mathbf{n^2+n^3}$ **表** 等；而問題類則是多樣的代數、幾何類的問題。從這些文獻可看出，巴比倫人已具有相當高超的計算能力以及縝密的思考模式。

Part 1　開端

自然而然，巴比倫人轉而探討三次方程的解法。雖然知識的侷限未讓他們找到一般方法，不過他們仍找到了簡便的數值解法：

問題Ⅰ：（巴比倫人的 $n^2 + n^3$ 表）
試解：　$2x^3+3x^2=540$

〔解〕原式 ➔ $8x^3+12x^2=2160$ $(\times 4)$ ➔ $y^3+3y^2=2160$ $(y=2x)$

➔ $27z^3+27z^2=2160$ $(y=3z)$ ➔ $z^3+z^2=80$ ➔ $z=4$, $y=12$, $x=6$

顯然地，這樣的數值解法，有著十分嚴重的 Bugs，例如：

問題Ⅱ：試解　$2x^3+3x^2=550$

對於這樣的小改變，巴比倫人只能回答解的約略值。

Q1：要如何 Debug？

Q2：一元三次方程式有沒有公式解？

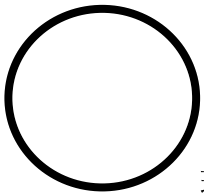
Part 2　　真不知天高地厚！

問題Ⅲ：（阿拉伯的神話故事）

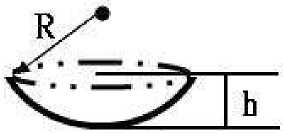
　　真主覺得必須在渾沌的宇宙中建立天和地了！於是經過了漫長的一萬年，祂造出了一個巨大無比的水晶球，又花了數千年的光景，捏出一個稍小的泥球。接著，將泥球塞進水晶球，填平於底部，於是天和地就形成了！

　　若大球的半徑是 10 單位（很巨大的單位），小球半徑為 6 單位。

試問：　天有多高？　地有多厚？



球體



球缺

〔解〕

（1）古阿拉伯人花了好長一段時間，得出了球體，以及球缺的體積：

$$V_{球}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad , \quad V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi\cdot h^2(3R-h)$$

（2）

問題Ⅳ：（問題改一下）

　　若大球的半徑是 10 單位，小球半徑為 5 單位，則天有多高？地有多厚？

〔解〕　如法炮製：$V_{小球}=V_{球缺}$ ➔ $\cdots$ ➔ $h^3-30h^2+500=0$

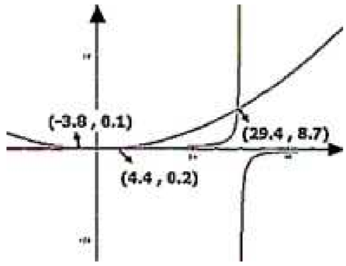
➔ $(x-??)(\ !@\#\$\%\ orz..\wedge\&*/"\ )$ ➔ 囧了！

Part 3　　歐瑪爾-海亞姆 的說法：

問題Ⅴ：　試解方程　　　$x^3-30x^2+500=0$

〔解〕　原式 ➔ $x^2(x-30)=-500$ ➔ $\dfrac{x^2}{100}=\dfrac{5}{30-x}=y$　（令為 y）

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{100} = y \\ \dfrac{5}{30-x} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 100 \cdot y \\ y \cdot (30-x) = 5 \end{cases} \Rightarrow$



問題Ⅵ： 試解方程 $x^3 + x - 1 = 0$

〔解〕

Q1： 所以方程該如何解？

Q2： 我怎麼知道座標是啥東東？

Part 4 王孝通 緝古算經

問題Ⅶ：（來解古人的題吧！） 假令句股相乘冪<u>七百六</u>、五十分之一，弦多於句三十六、十分之九，問三事各多少？（註釋：句，通今日的勾） 〔緝古算經〕

〔解〕先 <u>翻譯</u>，再列式：

$\Rightarrow$ $b^2 = (c-a)\cdot(c+a) = (c-a)\cdot[(c-a)+2a]$ $\Rightarrow$ $(ab)^2 = a^2 \cdot (c-a)\cdot[(c-a)+2a]$

$\Rightarrow$ （代入數字並化簡） $500\,a^3 + 9225\,a^2 - 3377129 = 0$ $\Rightarrow$ (因式分解) $a = 14\tfrac{7}{20}$， $\therefore b = 49\tfrac{1}{5}$， $c = 51\tfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ 故答曰：句十四二十分之七、股四十九五分之一、弦五十一四分之一 （汗）

問題Ⅷ：（嚇死人的數字！） 假令有股弦相乘冪四千七百三十九、五分之三，句少於弦五十四、五分之二，問股多少？ 〔緝古算經〕

（由於數字實在「胡鬧得太過火」了 orz…，所以只列結果，***<u>有興趣者</u>*** 可自行嘗試= =）

… $1000\,a^3 + 136000\,a^2 + 5918720\,a - 125974233 = 0$ ， a = 15.3 ∴ b = 68

$\Rightarrow$ 故答曰：六十八 （昏）

☆ 兩個定理：

(α) 牛頓定理：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ 為一整係數 n 次多項式，若 $px-q$ 是 $f(x)$的一次整係數因式，且$(p, q)=1$，則 $p\mid a_n$，且 $q\mid a_0$。

(β) 勘根定理：設 $f(x)=0$ 為實係數 n 次方程式，若找到兩實數 a, b，使 $f(\mathrm{a})f(\mathrm{b})<0$，則此方程式在 a 與 b 之間可找到（至少）一實根。

問題Ⅸ：（秦九韶、賈憲 的方法）

試解　　$a^3+a-1=0$　　至小數第四位

〔解〕令 $f(a)=a^3+a-1$，則由十分逼近法可做出下表，並得其中一根約為 $a_1\approx 0.6823$

a	0	0.6	0.68	0.682	0.6823	0.68232	0.682327
$f(a)$	-1	-0.184	-0.006	-0.0008	-7×10^{-5}	-1.9×10^{-5}	-1.93×10^{-6}
a	1	0.7	0.69	0.683	0.6824	0.68233	0.682328
$f(a)$	1	0.043	0.0185	0.0016	0.0002	5.3×10^{-6}	4.7×10^{-7}

因此，由十分逼近法，可得到根的任意逼近值。緊接著，由於 a_1 是原方程式的一根，所以 a^3+a-1 也「約略」有 $a-a_1$ 此一因式，也就是指餘式很小。因此，乘勝追擊！只需再對商式求解，即可得出根的近似值。 Let's go on !!

因此，我們找到了三個根的近似值，只是，它的真實樣貌，仍然充滿神密。然而，到了三次方程公式解的發展年代，已經是十六世紀的事了……

Part 6　　根式解的故事

說到一元三次方程式，不得不提到其中最關鍵的兩個人物，塔塔利亞(Niccolò Tartaglia) 以及卡丹(Gerolamo Cardano)。整個發展歷程正因為這兩個角色而充滿濃厚的戲劇性。

那些是發生在義大利的往事。當年，費羅(del Ferro)漂洋渡海，從阿拉伯帶回了一本算書，裡頭記錄了一些特殊型三次方程的解法，費羅細細研讀，並獨自加以改進，得到些許意外的成果，臨終時，將這些成果傳授給兩個人：女婿，那發(Della Nave)，以及得意門生，菲俄(Antonio Fiore)。

那發那個放蕩公子，根本無心向學，才過沒多久便把祕笈束之高閣；而菲俄也自以為是地認為是他，且只有他，唯一掌握通往三次方程一般解的大門的鑰匙，不但未將這不完全的解法改進並推廣，反而只等待著時機，讓這分祕笈成為「決鬥」時的「殺手劍」。當代數學界盛行一種稱為「決鬥」的數學競賽，雙方開出勝負的條件、賭注，於是各出三十題，在「眾人」的「見證」之下分出勝負，想當然而，勝者必聲名大造，敗者則身敗名裂。不過菲俄的如意算盤大概是打錯了，因為在不遠的小鎮裡，出現了另一位高手。

他正是塔塔利亞，本名曰「尼克拉」，由於小時候的戰爭之故，嘴角留下一道長長的疤痕，導致日後講話結巴，因此被戲稱塔塔利亞（意指講話結巴）。塔塔利亞幼時極為好學，對身邊的各種事總是充滿好奇心。又因為家境清寒，無法上學，只得到學校圖書館「半工半讀」。那兒的「校長爺爺」很快地發現他的才能，並極力栽培他，塔塔利亞也十分積極進取，不久後成為該校最優秀的數學教師。

有一次，塔塔利亞解出同事科拉所提出的兩道關於三次方程的「難題」，由於解的型式「太具有創造性」，讓整個歐洲數學壇大為震驚。事情傳進菲俄耳裡，被視為何等挑釁，他立刻向塔塔利亞提出「決鬥」，由於塔塔利亞日以繼夜地加緊研究，總算在決鬥的前一天發現了更廣泛的解法，相對於菲俄始終只掌握那樣的特殊解，因此最後結果必然是：塔塔利亞大勝，菲俄頹然而慘敗。

那時候，另外有一位數學家，名曰「卡丹」，十分沉迷於那場撼動人心的比賽，也急於得知他的「祕法」（當然，那是沒那麼容易要到手的），於是展開「索取」公式解的行動。塔塔利亞不堪卡丹的打擾，終將解法寫成一首費解的詩，交給卡丹，後者也允諾絕不會公佈解法。但誰又曾料想到，不久後，卡丹卻意外得知，那發也有三次方程的解法，而且和塔塔利亞的如出一轍。於是卡丹也就毫無保留地將解法公佈在【大法】這本新著作中。（當然，他有做些許改進，並註明受塔塔利亞的啟發）

很快地，另一場「筆戰」一觸即發，塔塔利亞與費拉里（***費拉里？***）的另一場決鬥隨之而起。那也是一場象徵性的決鬥，只不過它最終在失控的場面終止，留下充滿著混亂的一切。此後，三次方程的公式解也確定成了*卡丹公式解*。

Part 7　　根式解的思維

Q：如何下手？

← Key Point →

----------(甲)

問題X：　(1) 解　$x^3-3x-2=0$　　(2) 解　$x^3-6x+4=0$

〔解〕

Q：我要如何配出 u 及 v ??

問題ＸⅠ　　　試解　$x^3 = A$

〔解〕 $x^3 - A = 0$ ➔ $\left(x-\sqrt[3]{A}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{A}x+\left(\sqrt[3]{A}\right)^2\right)=0$ ➔ $x = \sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{A}\,\omega$, $\sqrt[3]{A}\,\omega^2$

問題ＸⅡ （卡丹公式解） 試解：　　　$x^3 + px + q = 0$

目標：

〔解〕

$$\begin{cases} -3uv = p \text{------}(乙) \\ -(u^3+v^3) = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3v^3 = \dfrac{-p^3}{27} \\ u^3+v^3 = -q \end{cases}$$

以 u^3和v^3為兩根的二次方程為　$t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$

解得兩根為 $u^3 = -\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ ，$v^3 = -\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$ （ 其中 $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ 為判別式 ） ----------(丙)

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}} \;,\; \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,\omega \;,\; \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,\omega^2 \\ v = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}} \;,\; \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,\omega \;,\; \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,\omega^2 \end{cases}$$

但 u , v 必須滿足(乙)式，故 u , v 只有三種可能的搭配，故由 $x = u + v$ 得：

問題ＸⅢ：　（有二次項怎麼辦？） 試解：　$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

<*key*> 平移！

〔解〕

由問題ＸⅡ的方法求出 y，再代回 $x = y - a/3$。

問題ⅩⅣ　（用用看唄！）

試完成問題Ⅱ、問題Ⅵ，及科拉的兩道「難題」：

(1) **試求一數，它的立方加上它的平方的三倍等於５**

(2) **試求三數，第二個數比第一數多２，第三個數比第二個數多２，三數乘積是 1000**

〔答〕（參考隔壁的吧…orz）

Part 8　卡丹公式解　卡彈了！？

問題ⅩⅤ　（明明是整數！）

試解：　$\boldsymbol{x^3+6x-20=0}$ $\left(=(x-2)(x^2+2x+10)\right)$　〔大法〕

〔解〕代入公式解即可得唯一實根

$$\boldsymbol{x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}$$

但此方程顯然只有 x = 2 一個實根。Why ??

〔理由〕其實

只是樣子不易發現而已！其實，也有些例子連「化簡」都做不到，如：$x^3+3x=4$。

問題ⅩⅥ　（遇到虛數怎麼辦？）

試解：〔a〕$x^3=9x+10$　〔b〕$x^3=6x+4$

〔c〕$x^3=6x+2$〔大法〕　〔d〕$15x=x^3+18$　〔大法〕

〔e〕問題Ⅴ　〔f〕$x^3+px+q=0$，$\Delta<0$

〔解 a〕移項，$x^3-9x-10=0$，則

(1) 用因式分解：$x=-2$ 或 $x=1\pm\sqrt{6}$

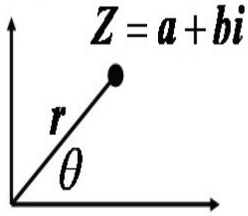
(2) 若套入公式解：$x=\sqrt[3]{5+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{-2}}$，這…難不成是複數 ??

面對這種窘（囧？）境，事實上，那個時代的人心裡也十分惶恐，因為他們尚未完全接受負數以及無理數。然而在這時候，又有一種怪數闖進他們的世界，把他們的概念搗得更亂。

人們不斷嘗試著，想突破這樣的頸瓶，想重建它們應有的規矩，想恢覆它們原本的性質。經歷一段時間，數學家們找到了某些解決之道，以下為其中兩種：

A）棣美弗———迂迴地繞過複數地帶

<註> 對於任意 $Z=a+bi$ ，$a,b\in R$，我們可以在複數平面上標示出來，如圖。同時也可以得出它們的「長度 r 」（絕對值），以及主幅角 θ（ $0^o\le\theta<360^o$ ）。因此，可得出



$$a+bi=r\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$$

另外，根據棣美弗定理，也可推出以下性質：

若 $Z^3=r\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $Z=\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)$ ，$k=0,1,2$

若 $Z^3=r\cdot(\cos\theta-i\sin\theta)$，則 $Z=\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)$ ，$k=0,1,2$

回到原題，套用問題中 X Ⅱ的（丙）式：

$$\begin{cases} u^3=5+\sqrt{2}\cdot i=3\sqrt{3}(\cos\alpha+i\sin\alpha) \\ v^3=5-\sqrt{2}\cdot i=3\sqrt{3}(\cos\alpha-i\sin\alpha)\end{cases}$$ 其中 $0\le\alpha<2\pi$ ，且 $\cos\alpha=\frac{5}{3\sqrt{3}}$ ，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

（但事實上 $0<\alpha<\pi$ ，所以可得出 $\alpha=\cos^{-1}\frac{5}{3\sqrt{3}}$ 〔註 1〕）

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\sqrt{3}\cdot(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3}) \\ v=\sqrt{3}\cdot(\cos\frac{\alpha+2\ell\pi}{3}-i\sin\frac{\alpha+2\ell\pi}{3})\end{cases}$$ 其中 k ，ℓ=0,1,2

如同公式解中開方後的需求〔即滿足(乙)式〕，故 $(k,\ell)=(0,0)$ ，(1,1)，(2,2)，於是

$$x=u+v=\sqrt{3}\cdot(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3})+\sqrt{3}\cdot(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3})$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}$$ [其中 $k=0,1,2$]

≒ 3.45 ， −2 ， −1.45 （都是實根！？）.

B）韋達———山不轉路轉，另闢蹊徑之 cos 三倍角公式

既然先前所導出的公式解在不可約（$\Delta<0$）的情形之下不適用，那不如拋下一切顧忌，直接將一切 砍掉重練(?)，於是我們將尋找另一個有利的恆等式，再對它動手腳！

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \Rightarrow \cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0$$

$$\Rightarrow (a\cos\theta)^3 - \frac{3a^2}{4}(a\cos\theta) - \frac{a^3}{4}\cos 3\theta = 0 \quad \text{----------(丁)}$$

目標：尋找 a 以及 θ 使 $\begin{cases} -3a^2/4 = -9 \quad (=p) \\ -\dfrac{a^3}{4}\cos 3\theta = -10 \quad (=q) \end{cases}$，則 求出 $a\cdot\cos\theta$ 即為其解。

$\Rightarrow$ 解得 $a^2=12$．取 $a=2\sqrt{3}$，得 $\cos 3\theta = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$〔註 2〕———（戊）

$\Rightarrow 3\theta = \cos^{-1}\dfrac{5}{3\sqrt{3}} + 2k\pi$，$2k\pi - \cos^{-1}\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$〔註 1〕，$k\in Z$

$\Rightarrow \cos 3\theta = \cos\left(\dfrac{\cos^{-1}\frac{5}{3\sqrt{3}} + 2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$〔註 3〕

$$\therefore\ x = a\cdot\cos\theta = 2\sqrt{3}\cdot\cos\left(\frac{\cos^{-1}\frac{5}{3\sqrt{3}}+2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$$

〔註 1〕仿照此例：當 $x^2=A$，$A>0$ 時，我們記成 $x=\sqrt{A}$；類似地，我們可說：當 $\cos\phi = B$，$0\le\phi\le\pi$ 時，我們記成 $\phi=\cos^{-1}B$。此為反三角函數，且 $\cos^{-1}\phi \ne \dfrac{1}{\cos\phi}$

〔註 2〕在（戊）式中所得的數值介於 -1 和 $+1$ 之間，故可反推回原角度。而事實上，只有在不可約的情況之下才會有 $|\cos 3\theta|<1$，同學可自行驗證。（hint：過程中別忘了有個重要的要件，那就是 $p<0$）

〔註 3〕不論 3θ 為何，所得出的 $\cos\theta$ 始終只有所列出的三種可能。要推得此性質需要一些蠻幹的功夫。

〔註 b~f〕b 題的 $\alpha\,(=3\theta)$ 角為 45°（好角度！）；c 題並不能因式分解；d 題 $\alpha\,(=3\theta)$ 角為鈍角；e 題數字龐大；f 題為一般型。以上解法皆與 a 題相似，同學可自行解之。

事實上，對任何 $x^3+px+q=0$，其中 $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 < 0$ 的三次方程，其根皆為：

$$x_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} \quad \left(\text{其中 } \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}\right),\ 0\le\theta\le\pi,\ k=0,1,2\right)$$

的型式，故都是實數！

Part 9　三次方程的結論與應用

＊ 根的分類：

＊ 對於任意三次方程的解法：

(1) 還是先乖乖的因式分解吧！

(2) 若找不到有理根，再套用公式解。

＊ 應用：

(1) 得以解決三等分角之不可能問題。

(2) 得以解決倍立方體之不可能問題。

Part 10　踏腳石

這場持續千年的風波，總算得以平靜。不過，人們早已將目標轉向一元四次方程了！要如何解四次方程？公式解是什麼？誰發現的？

費拉里，恩，是費拉里！他是卡丹的學生。卡丹在他的【大法】之中，也有以實例的形式說明如何解一元四次方程。它的標準型解法如下：

> 問題 XⅦ （費拉里公式解）
>
> 試解：$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

〔解〕

原式 ➔ $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$

➔ $\boldsymbol{x^4 + ax^3 + (\frac{a}{2})^2 x^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d}$

➔ $\boldsymbol{\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = (\frac{a^2}{4} - b)x^2 - cx - d}$

若右式為完全平方式，則可立即化為兩個一元二次方程式，並得其根；若右式並非完全平方式，則我們在等號兩邊同加一些和 y 相關的項，並整理為如下的形式：

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{a \cdot y}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \qquad \text{---------(己)}$$

若欲使右式變成完全平方式，則所引進的變數 y 必須滿足：

$$\left(\frac{a \cdot y}{2} - c\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right) \cdot \left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0$$

➔ $\boldsymbol{y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (a^2 d - 4bd + c^2) = 0}$ ---------(庚)

將所得的 y 值代回（己）式，同樣地，化為兩個二次方程，「即」可得其解。

問題 XVIII （來 Try 一下）

試解： $x^4+3x^3+5x^2+4x+2=0$

<註> 這個四次方程並沒有實根，所以用因式分解處理它是件非常 **痛苦** 的事！

〔解〕 代入（庚）式，降成三次方程得：

$$y^3-5y^2+4y+6=0$$ ，得 y = 3。

代回（己）式：

$$\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow (x^2+x+1)\cdot(x^2+2x+2)=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\ ,\ -1\pm i$$

《其他解法》

在相近的時代裡，仍有許多數學家提出了不同的想法，不過整體的架構皆大同小異。在此略述之。

＊ 韋達之三次方程解法：

由 $y^3+py+q=0$，令 $y=t-\dfrac{p}{3t}$ 代回原式，則會變成 $t^3+q-\dfrac{p^3}{27t^3}=0$

$\Rightarrow (t^3)^2+q(t^3)-\dfrac{p^3}{27}=0$ ➔ 解得六組 t 值，帶回 x，則會發現其實只有三組解。

＊ 韋達之四次方程解法：

由 $x^4+ax^3+bx^3+cx+d=0$，令 $x=y-a/4$，則得到 $y^4+py^2+qy+r=0$ 的形式

若 $q=0$，則可直接解 y^2 的二次式，而得 y，以及 x。

若 $q\neq 0$，則先將低次項往右移，得 $y^4=-py^2-qy-r$，接著，等號兩邊同加某些項：

$$(y^2+\alpha)^2=(2\alpha-p)\cdot y^2-q\cdot y+(\alpha^2-r)$$

同樣的意圖，同樣地使右式成為完全平方，則可類比費拉里公式解：

$$(-q)^2-4\cdot(2\alpha-p)\cdot(\alpha^2-r)=0 \Rightarrow 8\cdot\alpha^3-4p\cdot\alpha^2-8r\cdot\alpha+(4pr-q^2)=0$$

＊ 由圓錐曲線解四次方程

〔註〕此解法涉及舊版高三數甲上平移旋轉之退化曲線的內容，有興趣者

可向（97 級或更早的）學長姊借課本參考。

考慮 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

若 $d=0$，則直接提出 x，並化為三次方程。

若 $d\neq 0$ ➔ $x=0$ 不是原方程的根，$\Rightarrow x^2+d\dfrac{1}{x^2}+ax+c\dfrac{1}{x}+b=0$

又令 $y=\dfrac{1}{x}$，則 $\begin{cases} x^2+dy^2+ax+cy+b=0 & \text{..........(1)} \\ x\cdot y-1=0 & \text{..........(2)} \end{cases}$

現在，尋找 k，使（1）+ k※（2）成為退化曲線（可因式分解），也就是

$$x^2+k\cdot x\cdot y+dy^2+ax+cy+(b-k)=0$$ 可因式分解。

所以 $\begin{vmatrix} 2 & k & a \\ k & 2d & c \\ a & c & 2(b-k) \end{vmatrix}=0$，則可依照類似方法可得出原方程的四根。

《進階問題》

至目前為止，我們所探討的方程式，係數都是實數（雖然沒有明講），倘若係數是複數，則公式解會有什麼不一樣呢？以下供各位更進一步思考：

1) $Z^2 = a + bi$ （a ，$b \in R$），則 $Z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + sign(b)\cdot\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right)$

(其中當 x>0 時，sign(x)=1；當 x=0 時，sign(x)=0；當 x<0 時，sign(x)=−1，而 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$)

2) $Z^n = W \in C$ 且 $n \in N$ ，則可用棣美弗定理（高一下最後一節）解之。

3) 如何解 $(1+i)\cdot Z^2 + 2i\cdot Z + (5-2i) = 0$ ？(據說高一上有教?)

4) 如何解 $Z^3 + (1+i)\cdot Z^2 + 2i\cdot Z + (5-2i) = 0$

5) 如何解 $Z^4 + (1+i)\cdot Z^2 + 2i\cdot Z + (5-2i) = 0$

結尾

Q：五次方程呢？

答：

可想而知，許多數學家們隨而探索五次方程去了。只是，又是一個兩百年，卻沒有多大進展！儘管其中有尤拉（Euler）、拉格朗日（Lagrange）的參與，但成果始終有限。於是人們也就開始懷疑：是否真有公式解。而這樣的問題從拉格朗日、魯非尼，到阿貝爾（Abel）、以及伽羅瓦（Galois）所提出的相關論證，人類總算得出關於公式解的重要結論：

任意五次或五次以上的方程式皆無公式解。

於是，跨越千年歷程的公式解，才算真正地落幕了。

参考資料

(1) Carl B. Boyer；A history of mathematics；Wiley；1989.

(2) 王懷權；數學發展史；協進圖書公司；1981

(3) Morri Morris Kline；數學史、數學思想的發展；九章出版社；1983

(4) 傅鍾鵬；三次方程風雲記；凡異出版社；2006

(5) 王孝通；緝古算經；藝文出版社；1966

(6) Cardano；The Great Art；M.I.T. Press；1968

(7) 項武義；從算術到代數；九章出版社；1985